

Série de
**TRABALHOS
PARA DISCUSSÃO**

Working Paper Series

ISSN 1518-3548

528

JULY 2020

*Medidas de Núcleo de Inflação para o Brasil baseadas no
Método Wavelets?*

Nelson da Silva

ISSN 1519-1028
CGC 00.038.166/0001-05

Trabalhos para Discussão	Brasília	n° 528	julho	2020	p. 1-39
--------------------------	----------	--------	-------	------	---------

Trabalhos para Discussão

Editado pelo Departamento de Estudos e Pesquisas (Depep) – *E-mail*: workingpaper@bcb.gov.br

Editor-chefe: Francisco Marcos Rodrigues Figueiredo

Coeditor: José Valentim Machado Vicente

Chefe do Depep: André Minella

Diretor de Política Econômica: Fabio Kanczuk

Todos os Trabalhos para Discussão do Banco Central do Brasil são avaliados em processo de *double blind referee*.

Ainda que este artigo represente trabalho preliminar, citação da fonte é requerida mesmo quando reproduzido parcialmente.

As opiniões expressas neste trabalho são exclusivamente do(s) autor(es) e não refletem, necessariamente, a visão do Banco Central do Brasil.

The views expressed in this Working Paper are those of the authors and do not necessarily reflect those of the Banco Central.

Divisão de Atendimento ao Cidadão

Banco Central do Brasil

Deati/Diate

SBS – Quadra 3 – Bloco B – Edifício-Sede – 2º subsolo

70074-900 Brasília – DF

DDG: 0800 9792345

Fax: (61) 3414-2553

Internet: <http://www.bcb.gov.br/?FALECONOSCO>

Non-technical Summary

In general, core inflation corresponds to the price level of an economy disregarding the noise caused by transitory shocks. This measure is important because it allows economic agents to perceive the price trend more clearly. For this reason, core inflation has been estimated, studied and monitored by academics, specialists, central banks and other economic entities around the world. Its estimate is based on statistical methods or economic models.

Transient shocks embedded in the general price level, in turn, are random perturbations over prices, such as climatic and seasonal shocks. These disturbances affect the price of products and services in an unknown and unpredictable way, but they are quickly reversed without affecting inflation expectations, thus not requiring any intervention by monetary policy. Methods for estimating core inflation, then, seek to purge these noises from the price series. In general, core measures are obtained by eliminating items whose prices are most volatile, with the exclusion of food and energy being the most common.

Core inflation measures often monitored in Brazil have been less volatility than full inflation and thus play a good role as a more consistent measure of inflation over time. However, these conventional core measures have not performed well in terms of meeting some formal requirements proposed in the economic literature for a measure to be strictly considered as good core inflation. This article, following the efforts in the literature to build alternative measures, proposes the construction of core inflation measures for the Brazilian economy using statistical applications of wavelet techniques.

The expectation that the core measures estimated by this technique respond favorably to the formal tests mentioned above was based, first, on the good empirical results obtained in academic works covering data from other countries, and, second, on the repertoire of means that the wavelets method offers to extract the noise present in a series. Many of these possibilities were mapped and tested until the most promising wavelet specifications were found, and then the derived core measures were confronted with the main existing core inflation measures. The final results are favorable to the use of this technique, either in the construction of an exclusive wavelet core, or in the use of the method to improve traditional core measures.

Sumário Não Técnico

De maneira geral, o núcleo de inflação corresponde ao nível de preços de uma economia desconsiderando o ruído causado pelos choques transitórios. Essa medida é importante porque permite aos agentes econômicos perceber mais claramente a tendência dos preços. Por isso, o núcleo de inflação tem sido continuamente estimado, estudado e monitorado por acadêmicos, especialistas, bancos centrais e outros entes econômicos ao redor do mundo. Sua estimativa se baseia em métodos estatísticos ou em modelos econômicos.

Os choques transitórios embutidos no nível geral de preços, por sua vez, são perturbações aleatórias sobre os preços, como os choques climáticos e sazonais. Essas perturbações afetam os preços dos produtos e serviços de forma e recorrência desconhecidas, mas são rapidamente revertidas sem afetar a expectativa de inflação e demandar alguma intervenção por parte da política monetária. Os métodos de estimação do núcleo de inflação, então, procuram expurgar esses ruídos da série de preços. Em geral, os núcleos são obtidos pela eliminação dos itens cujos preços são mais voláteis, sendo a exclusão de alimentos e energia a mais comum.

As medidas de núcleo de inflação frequentemente acompanhadas no Brasil apresentam volatilidade menor do que a inflação cheia e, assim, desempenham um bom papel como uma medida mais consistente da inflação ao longo do tempo. Entretanto, esses núcleos convencionais não têm tido um bom desempenho em termos de se enquadrarem a alguns requisitos formais propostos na literatura econômica para que uma medida seja estritamente considerada um bom núcleo de inflação. Este artigo, seguindo os esforços presentes na literatura para se construir medidas alternativas, propõe a construção de medidas de núcleo de inflação para a economia brasileira usando aplicações estatísticas de técnicas de *wavelets*.

A expectativa de que o núcleo estimado por essa técnica responda favoravelmente aos testes formais citados acima se baseou, primeiro, nos bons resultados empíricos obtidos em trabalhos acadêmicos contemplando dados de outros países e, segundo, no repertório de meios que o método *wavelets* oferece para se extrair o ruído presente em uma série. Muitas dessas possibilidades foram mapeadas e testadas até se encontrar as especificações *wavelets* mais promissoras e, então, os núcleos derivados foram confrontados com os principais núcleos existentes. Os resultados finais são favoráveis ao uso dessa técnica, quer seja na construção de um núcleo *wavelet* exclusivo, quer seja na utilização do método para aprimorar os núcleos tradicionais.

Medidas de Núcleo de Inflação para o Brasil baseadas no Método *Wavelets*

Nelson da Silva *

Resumo

Este trabalho apresenta medidas de núcleo de inflação nas quais os choques transitórios são atenuados pela aplicação de técnicas de *wavelets*. Os dados mensais do IPCA brasileiro usados na construção desses núcleos começam em dezembro de 1997 e terminam em março de 2019. As estimativas são submetidas aos testes tradicionais como ausência de viés, representação de tendência e capacidade preditiva, por exemplo. Os resultados mostram que os núcleos estimados por *wavelets* atendem diversos critérios estabelecidos na literatura. A desvantagem é que esses núcleos são periodicamente revisados. O ajuste dos núcleos tradicionais por *wavelets*, alternativamente, tende a melhorar o desempenho dos mesmos em relação aos critérios propostos e a minimizar as revisões.

Palavras-chaves: Núcleo de Inflação; Choques Transitórios; Ondaletas.

Classificação JEL: C13; E31; E52.

Este Trabalho para Discussão não deve ser citado como representando as opiniões do Banco Central do Brasil. As opiniões expressas neste trabalho são exclusivamente do(s) autor(es) e não refletem, necessariamente, a visão do Banco Central do Brasil.

*Departamento de Estudos e Pesquisas (Depep), Banco Central do Brasil. E-mail: nelson.silva@bcb.gov.br

1 Introdução

O núcleo de inflação é uma medida da tendência dos preços ao consumidor e um indicador monitorado pelos bancos centrais na condução da política monetária. O propósito de se construir um núcleo é capturar dos dados de preços o sinal da inflação e eliminar o ruído causado pelos choques transitórios. Com isso, é possível estabelecer uma estimativa da flutuação dos preços induzida pela política monetária separada das variações decorrentes de outras fontes, tais como política fiscal, efeitos sazonais e mudanças na taxa de câmbio, chamadas por [Cecchetti \(1997\)](#) de *noise*. A política monetária tem impacto associado ao médio prazo e os outros fatores, tipicamente, ao curto prazo. A inflação medida pelo índice de preços ao consumidor contém choques transitórios, dificultando a percepção da tendência de variação dos preços na economia. Como o horizonte relevante para a política monetária é o médio prazo, medidas de núcleo são utilizadas como indicadores auxiliares na gestão da política monetária no sentido de manter a inflação dentro das metas estabelecidas. Alguns bancos centrais creditam maior destaque ao núcleo, outros menos.¹

Em geral, os núcleos são obtidos pela eliminação dos itens mais voláteis do índice de preços ao consumidor, sendo a exclusão de alimentos e energia a mais comum, como apontado por [Dowd et al. \(2011\)](#). Assim, sendo mais persistente, o núcleo serve como um indicador de pressão inflacionária. Entretanto, [Silva Filho e Figueiredo \(2014\)](#) destacam não existir evidências de uma medida de núcleo única e amplamente aceita como sendo superior em qualquer situação. Conseqüentemente, o conjunto de medidas calculadas e divulgadas pelos bancos centrais evoluiu ao longo do tempo, passando a incluir médias aparadas e/ou medianas ponderadas. No Brasil, por exemplo, medidas incluem o núcleo por exclusão de monitorados e de alimentos no domicílio, o núcleo de dupla ponderação, no qual os pesos originais do índice de preços são recalculados com base na volatilidade dos itens, e o núcleo de médias aparadas com suavização.²

Um ponto importante é que esses núcleos não satisfazem alguns critérios de avaliação usualmente utilizados na literatura. No exame de [Santos e Castelar \(2016\)](#), por exemplo, os núcleos brasileiros citados acima não atendem completamente aos critérios de ausência de viés, dinâmica de ajustamento e capacidade de prever a inflação no longo prazo. [Silva Filho e Figueiredo \(2011\)](#), por sua vez, também já haviam mostrado evidências das limitações dos núcleos. Em termos de replicar a tendência da inflação, [Silva Filho e Figueiredo \(2014\)](#) ratificam os resultados

¹ Argumentos a favor ou contra a se atribuir maior atenção ao núcleo de inflação na condução da política monetária podem ser vistos em [Mishkin \(2007\)](#) e [Bullard \(2011\)](#), respectivamente.

² [Silva Filho e Figueiredo \(2014\)](#) apresentam medidas de núcleo de inflação divulgadas por bancos centrais de diversos países e estudam as medidas de núcleo da economia brasileira.

anteriores. Citando diversos outros trabalhos, esses autores também apontam que “questões relacionadas à qual seria a melhor abordagem para construir uma medida de núcleo de inflação e a capacidade dessa medida de ser um bom previsor da inflação continuam fazendo parte da agenda de discussão e de pesquisa tanto de bancos centrais quanto da academia”.

O objetivo deste trabalho é calcular novas medidas de núcleo de inflação através do método de redução de ruído por ondaletas (*wavelets*) e compará-las com os núcleos tradicionais.³ Essas medidas são decorrentes do emprego da técnica de decomposição do sinal (série temporal), que compreende os métodos de limiarização (*thresholding*) e encolhimento (*shrinkage*). Esses algoritmos removem os choques não monetários de curto prazo, *noise*. Exemplos de medidas de núcleo de inflação baseadas no método de ondaletas incluem Dowd *et al.* (2011), Baqaee (2010), Amar (2012), Andersson (2008), Lahura e Vega (2011) e, no caso brasileiro, Denardin *et al.* (2016). Em relação a esse último, o presente trabalho se diferencia por aplicar métodos de decomposição mais gerais.

A vantagem da suavização de uma série temporal, ou estimação do sinal, ou ainda, eliminação de ruído, por *wavelets* é que por esse método se pode eliminar o ruído da inflação mesmo que a estrutura da série varie significativamente ao longo do tempo.⁴ Esse ponto é importante porque a série de inflação é sujeita a questões de não-estacionariedade, descontinuidade e mudança de regime, por exemplo. Como apontado por Baqaee (2010), uma das grandes virtudes do método *wavelets* é seu uso em dados com comportamento instável. Assim, dado o aspecto local do método, o núcleo calculado pode ser menos suscetível de sofrer revisões comparativamente à abordagem clássica de Fourier.⁵

A separação entre o componente persistente e o transitório da inflação também poderia ser feita pelo método clássico no domínio da frequência. Porém, como destacado por Anderson *et al.* (2006), a importância relativa desses dois componentes

³ O termo “ondaleta”, usado por Morettin (1999), deriva da palavra *wavelet* em inglês, que tem como gênese o termo francês “*Ondalette*” e significa onda pequena. Ao longo do texto se emprega ondaleta e *wavelet* como sinônimos.

⁴ Como destacado por Ramsey (2002), é preciso distinguir os termos suavização e eliminação do ruído porque eles têm diferentes objetivos. Mas, a exemplo de Baqaee (2010), essa distinção é imaterial para o exercício do cálculo do núcleo de inflação aqui proposto e a palavra suavização também será empregada por ser mais recorrente na economia. Formalmente, a suavização é um termo utilizado quando apenas o conteúdo de alta frequência é eliminado. A extração do ruído, por sua vez, retém qualquer informação da série temporal independente da frequência.

⁵ Na decomposição de Fourier, por exemplo, as funções de base harmônicas são localizadas em frequência, mas estendem-se ao longo de todo o domínio temporal. Pequenas mudanças em algumas das observações podem provocar alterações em todas as componentes da expansão de Fourier. As funções de base *wavelet*, por outro lado, têm escopo localizado em ambos os domínios: tempo e frequência. Essa característica é ideal para análises de sinais não estacionários, como argumentado em Morettin (2014, p. 120).

varia no tempo, o que torna a análise *wavelet* mais apropriada comparativamente à análise de Fourier. Outro problema com o método clássico e outras técnicas de suavização, como o filtro HP e médias móveis, é a necessidade de se definir arbitrariamente o conteúdo de cada frequência, ou seja, se nela estão presentes choques transitórios ou permanentes. No método utilizado neste trabalho, ao contrário, não se impõe *a priori* que toda alta frequência é composta exclusivamente por ruído. Na estimação do núcleo, assume-se que a série da inflação é o resultado da soma de sinal e ruído em todo instante do tempo e em cada frequência.

As medidas de núcleo derivadas da suavização por ondaletas são calculadas a partir do Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo - IPCA, com dados cobrindo o período Dez./1997-Mar./2019. Comparam-se essas estimativas, então, com as medidas tradicionais de núcleo, levando em conta dois aspectos comumente abordados na literatura. Em primeiro lugar, os núcleos são submetidos à avaliação de estatísticas básicas que cobrem os dados amostrais, como média, variância, ausência de viés e ajustamento dinâmico. Essa abordagem tenta capturar a eficácia de um núcleo em descrever a tendência da inflação. Em segundo lugar, usando estatísticas “fora da amostra”, a análise se direciona para as propriedades dos núcleos relacionadas à capacidade de prever a inflação futura. Esse aspecto procura identificar se um determinado núcleo ajuda na previsão da inflação. Esses dois critérios atendem a dois requisitos levantados por Dowd *et al.* (2011) para que uma medida seja considerada um bom núcleo: representação satisfatória da tendência e bom indicador da inflação futura. Os resultados mostram que as medidas derivadas da suavização por ondaletas têm potencial para incrementar as estimativas oficiais de núcleo.

Portanto, este artigo visa proporcionar uma contribuição à literatura destinada ao entendimento do movimento dos preços. Em particular, é um esforço para tentar distinguir a informação vinda dos dados de inflação no sentido de estimar que parte pode ser considerada um choque persistente e que parte pode ser associada a um choque transitório. Essa distinção é extremamente importante. Um movimento persistente dos preços, não identificado devidamente, pode ter seus efeitos amplificados via o canal das expectativas. Por outro lado, uma reação mais contundente a um choque transitório, interpretado incorretamente como permanente, pode gerar mais volatilidade aos preços.

Além desta introdução, o trabalho está estruturado da seguinte forma. Na seção 2, apresenta-se brevemente a metodologia da transformada e suavização *wavelet*, que consiste da separação do ruído para obter a tendência da série. A seção 3 contém os resultados relacionados às estatísticas dentro e fora da amostra. Em seguida, a seção 4 é destinada à discussão da diferença entre os núcleos tradicionais e *wavelets* do ponto de vista de uma transformada e investiga-se a vantagem de se aplicar o

método *wavelet* diretamente aos núcleos usuais ao invés de na inflação cheia. Na seção 5 encerra-se o trabalho com a respectiva conclusão.

2 Metodologia e Dados

2.1 Transformada *Wavelet*

A etapa inicial do procedimento de extração do ruído para estimação do núcleo é a obtenção da transformada *wavelet*. Emprega-se a versão discreta padrão (*Discrete Wavelet Transform* - DWT) e a versão não decimada, conhecida como máxima sobreposição (*Maximum Overlap Discrete Wavelet Transform* - MODWT).⁶ Seguindo Percival e Walden (2000), apresentam-se adiante as equações básicas para o cálculo dessas transformadas. Para uma discussão detalhada dos conceitos pode-se consultar, além de Percival e Walden (2000), Gençay *et al.* (2002), Crowley (2005), Nason (2008) e Morettin (2014), entre outros.

A transformada discreta é escrita como $\mathbf{W} = \mathcal{W}\mathbf{X}$, onde \mathbf{W} é um vetor $N \times 1$ de coeficientes, \mathcal{W} uma matrix $N \times N$ de transformação e \mathbf{X} a série temporal com N observações. A DWT é uma coleção de coeficientes *wavelets* de diversos níveis e de escala no último nível de decomposição J , ou seja, a matriz \mathbf{W} dividida em $\mathbf{W} = [\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_J, \mathbf{V}_J]^T$. Definindo j e t como os índices de nível de decomposição e tempo, respectivamente, $N_j = N/2^j$, L o comprimento do filtro e fazendo $\mathbf{V}_0 = \mathbf{X}$, os coeficientes *wavelets* ($W_{j,t}$) e de escala ($V_{j,t}$), para cada nível de resolução, são calculados por:

$$W_{j,t} = \sum_{l=0}^{L-1} h_l V_{j-1, 2t+1-l \bmod N_{j-1}}, \quad t = 0, \dots, N_j - 1, \quad (1)$$

$$V_{j,t} = \sum_{l=0}^{L-1} g_l V_{j-1, 2t+1-l \bmod N_{j-1}}, \quad t = 0, \dots, N_j - 1. \quad (2)$$

Há uma diversidade de filtros *wavelets* e a escolha do mais apropriado é uma questão subjetiva resolvida por critérios específicos ao problema analisado. No caso presente, a determinação de quais funções *wavelets* são mais adequadas se baseará nas propriedades que um núcleo deve possuir. Um filtro padrão na literatura é designado por LA(8) ($L = 8$) ou s8 - *Least Asymmetric (symmlet)*. O filtro mais simples é o de Haar, que tem os seguintes valores para o filtro *wavelet* (h) e de

⁶ A versão não decimada também é considerada com outros nomes, por exemplo, transformada discreta de ondaletas não decimada (*Non-Decimated DWT* - NDWT), ver Nason (2008).

escala (g): $h = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$; $g = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Em geral, para $k = 0, \dots, L-1$, $h_k = (-1)^{k-l} g_{L-1-k}$.

Os coeficientes *wavelets* $\widetilde{W}_{j,t}$ e de escala $\widetilde{V}_{j,t}$ da MODWT no nível j e no índice t são, respectivamente, definidos por:

$$\widetilde{W}_{j,t} = \sum_{l=0}^{L-1} \widetilde{h}_l \widetilde{V}_{j-1,t-2^{j-1}l \bmod N}, \quad (3)$$

$$\widetilde{V}_{j,t} = \sum_{l=0}^{L-1} \widetilde{g}_l \widetilde{V}_{j-1,t-2^{j-1}l \bmod N}. \quad (4)$$

Os filtros \widetilde{h}_l e h_l tem a seguinte relação: $\widetilde{h}_l = h_l/\sqrt{2}$; o mesmo valendo para g .

2.2 Estimação do Núcleo

Seja \mathbf{W}_j o conjunto dos n coeficientes *wavelets* no nível j da transformada. A sequência de detalhes \mathbf{D}_j é formada pela reconstrução da transformada após se zerar os demais coeficientes exceto \mathbf{W}_j . Invertendo cada nível da transformada e somando todos leva de volta à série original. A soma de apenas um subconjunto dos componentes da decomposição de multiresolução pode ser vista como uma operação de suavização da série temporal se os componentes do ruído forem excluídos da soma. Porém, essa abordagem de extração do ruído requer a definição de quais frequências representam inflação monetária e quais representam choques não monetários. Esse requerimento pode ser problemático caso algumas frequências contenham informações sobre os dois eventos, resultando num núcleo suavizado demais ou de menos, como explicado em [Andersson \(2008\)](#).⁷

O foco deste trabalho é a remoção do ruído aplicando técnicas não lineares no domínio *wavelet*, algumas vezes chamadas de *waveshrink*, [Percival e Walden \(2000, p. 417\)](#) ou *wavelet shrinkage*, [Morettin \(2014, p. 161\)](#). A ideia desse procedimento é manipular os coeficientes da transformada dado que um pequeno conjunto destes, capturando maior correlação entre a série e as funções-base da transformada, já permite isolar as características principais da série. Neste artigo são usados dois métodos *wavelets* para esse fim: *thresholding* e *shrinkage*. A regra de limiar (*thresholding*), aplicada a sinais determinísticos, torna nulos alguns coeficientes e, quanto aos demais, deixa-os inalterados ou diminuídos por meio de alguma função. Voltado a sinais estocásticos, a regra redutora (*shrinkage*) reduz a magnitude de alguns

⁷ Essa abordagem, voltada ao estudo do núcleo de inflação para o Brasil, já foi explorada por [Denardin et al. \(2016\)](#) e não será discutida neste trabalho.

coeficientes por meio de uma suavização não-linear enquanto outros permanecem inalterados. Ainda que o método *shrinkage* não anule coeficientes, tal como a técnica *thresholding*, os dois procedimentos são similares na medida em que muitos dos coeficientes na abordagem *shrinkage* assumem valores próximos de zero, Percival e Walden (2000, p. 408). Nesse dois métodos, todas as frequências podem conter ruído ou sinal, eliminando a necessidade de se definir arbitrariamente o que cada frequência contém (sinal ou ruído).

2.2.1 Estimação via *Thresholding*

Seguindo Constantine e Percival (2016) e Percival e Walden (2000), o método *wavelet thresholding* pode ser explicado da seguinte forma.

Assume-se que o modelo para a série temporal \mathbf{X} é $\mathbf{X} = \mathbf{D} + \boldsymbol{\epsilon}$, onde \mathbf{D} representa o componente determinístico desconhecido, e de interesse, e $\boldsymbol{\epsilon}$ é um ruído estocástico independente e identicamente distribuído de média zero. Nesse caso, pensando em termos de núcleo, a parte determinística contém a inflação monetária e a transitória o ruído (choque não monetário). A transformada *wavelet* subjacente é escrita como $\mathcal{W}\mathbf{X} = \mathbf{W} = \mathcal{W}\mathbf{D} + \mathcal{W}\boldsymbol{\epsilon} \equiv \mathbf{d} + \mathbf{e}$, sendo \mathbf{e} gaussiano, igualmente e identicamente distribuído com média zero e variância σ_{ϵ}^2 .

A informação conhecida é a série temporal \mathbf{X} e a partir dela se tenta obter uma estimativa para \mathbf{D} . A eliminação do ruído é alcançada por meio de três passos: i) calcula-se a transformada discreta de \mathbf{X} ; ii) reduz-se em direção a zero os coeficientes *wavelets* \mathbf{W}_j por meio de um esquema de limiar e uma regra de encolhimento, ou seja, despreza-se parte dos coeficientes que representam menor correlação entre a série e as funções-base e; iii) inverte-se a transformada discreta com os coeficientes recalculados para se obter uma estimativa $\hat{\mathbf{D}}$ de \mathbf{D} .

Dois métodos de encolhimento mais difundidos e adotados neste trabalho são o limiar duro (*hard*) e o limiar suave (*soft*). Denotando W como um coeficiente DWT arbitrário e definindo δ como o limiar, os métodos de encolhimento *hard* e *soft* podem ser escritos matematicamente por, respectivamente:

$$W^h = W\mathbb{I}\{|W| > \delta\}, \quad (5)$$

$$W^s = \text{sign}(W)(|W| - \delta)\mathbb{I}\{|W| > \delta\}, \quad (6)$$

onde \mathbb{I} é a função indicadora definindo $\mathbb{I} = 1$ se $|W| > \delta$ e zero caso contrário. O método *soft* elimina os coeficientes com valor absoluto menor que δ e reduz os demais subtraindo-os por δ , resultando numa suavização adicional da série. Essa subtração por δ no método suave evita a descontinuidade imposta pelo limiar duro.

O parâmetro δ é escolhido com base na modelagem do ruído. Aqui são usadas algumas das principais técnicas de determinação do limiar, resumidamente descritas a seguir. Na primeira delas, o limiar **universal**, [Donoho e Johnstone \(1994\)](#), é definido por:

$$\delta^u = \sqrt{2\sigma_\epsilon^2 \log(N)}. \quad (7)$$

A estimativa de σ_ϵ^2 é baseada na mediana dos desvios absolutos dos coeficientes da escala 1, dividida pela constante 0,6745 para garantir que a estimativa não seja enviesada quando aplicada a um ruído branco gaussiano.

A segunda maneira de determinar δ é através do procedimento denominado **minimax**, W^{min} , [Donoho e Johnstone \(1998\)](#). Nessa abordagem, o parâmetro é obtido pela minimização de um limite superior teórico do risco assintótico de se estimar uma função usando estimador de limiar. δ minimax captura melhor os saltos e picos presentes na série. Resulta em um limiar menor que o universal produzindo um núcleo menos suave.

Os limiares anteriores são classificados como globais, ou seja, usados para a análise em todos os níveis. Um procedimento não global na obtenção de δ é o **adaptativo (SURE)**, W^{sure} , [Donoho e Johnstone \(1995\)](#). Esse parâmetro é não global no sentido que em cada nível de resolução em uma transformada *wavelet* se minimiza um estimador não enviesado do risco de Stein, [Percival e Walden \(2000, p. 402–406\)](#). Uma ressalva é que esse limiar pode produzir resultados não muito satisfatórios se os coeficientes de um dado nível são muito esparsos (nulos ou próximos de zero).

Por último, em termos do modelo apresentado acima, δ é calculado por meio da **validação cruzada**, W^{cv} , [Nason \(1996\)](#). Nessa técnica, estima-se o valor do limiar pela separação dos dados com o propósito de escolher a estimativa do parâmetro que gere o melhor estimador para prever o novo dado observado. Isso pode ser alcançado ao se desmembrar as observações de índice par das de índice ímpar. Então, uma estimativa *wavelet* de limiar é calculada para a amostra de índice par e, por meio de interpolação em termos de média de valores adjacentes, os valores das observações ímpares são determinados. O mesmo se faz com a amostra ímpar. O valor de δ é aquele que minimiza a perda quadrática dos erros da estimação dos valores pares e ímpares.

2.2.2 Estimação via *Bayesian Wavelet Shrinkage*

Passando para a abordagem *wavelet shrinkage*, o modelo para a série temporal \mathbf{X} também pode ser $\mathbf{X} = \mathbf{C} + \boldsymbol{\epsilon}$, onde \mathbf{C} representa o elemento estocástico e $\boldsymbol{\epsilon}$ o termo de erro. A transformada pode ser escrita como $\mathcal{W}\mathbf{X} = \mathbf{W} = \mathcal{W}\mathbf{C} + \mathcal{W}\boldsymbol{\epsilon} \equiv \mathbf{R} + \mathbf{e}$,

sendo $W_{j,t} = R_{j,t} + e_{j,t}$. Assume-se que os ruídos ϵ e \mathbf{e} são gaussianos i.d.d. com média zero e variância σ_ϵ^2 . Os algoritmos aplicados a esse caso não removem coeficientes, mas reescalona-os baseado numa regra de encolhimento. A técnica *wavelet shrinkage* será explorada neste trabalho pela formulação bayesiana, conforme dois modelos brevemente apresentados a seguir.

Na estimação desse modelo na **formulação bayesiana** de [Johnstone e Silverman \(2005b\)](#), cada coeficiente *wavelet* ($R_{j,t}$) assume valor zero com probabilidade $(1 - \omega)$ e a parte não nula da *prior* é proveniente de uma densidade simétrica de cauda pesada (*heavy-tailed*) γ com probabilidade ω . Essa mistura significa que a *prior* pode ser escrita como:

$$f_{prior}(R) = \omega\gamma(R) + (1 - \omega)\delta_0(R), \quad (8)$$

onde δ_0 representa uma função de probabilidade com massa concentrada no ponto zero. Essa especificação captura a característica esparsa dos coeficientes *wavelets*: a maioria sendo zero ou muito pequenos e podendo, assim, ser ignorados.

A densidade marginal do coeficiente observado (W) é dada por:

$$\omega g(W) + (1 - \omega)\phi(W), \quad (9)$$

onde g é a densidade obtida da convolução de γ com a densidade normal padrão ϕ , sendo a distribuição condicional de W dada por $[W|R \sim \mathcal{N}(W, \sigma_\epsilon^2)]$.

O parâmetro ω é escolhido automaticamente via a estimativa de máxima verossimilhança marginal dos coeficientes observados (W) e substituído de volta no modelo bayesiano. O estimador $\hat{\omega}$ de ω , é obtido pela maximização de:

$$l(\omega_j) = \sum_t \log \{ \omega_j g(W_{j,t}) + (1 - \omega_j)\phi(W_{j,t}) \}, \quad (10)$$

sendo possível estimar o parâmetro $\hat{\omega}_j$ para cada escala.

A outra **formulação bayesiana** empregada para a estimação do núcleo no campo das transformada *wavelet* é o método [Abramovich et al. \(1998\)](#). Nesse caso, a *prior* é da seguinte forma:

$$R_{j,t} = \pi_j \mathcal{N}(0, \tau_j^2) + (1 - \pi_j)\delta_0. \quad (11)$$

Portanto, a *prior* consiste de uma distribuição normal de média zero e um ponto de massa em zero, captando a característica esparsa dos coeficientes. Como a função de perda da decisão pela regra de Bayes é a absoluta, a perda esperada

a posteriori é o erro absoluto médio, que é minimizado ao se estabelecer que o estimador de Bayes para os coeficientes $R_{j,t}$ é a mediana *a posteriori*.

2.3 Dados

A inflação corresponde à variação mensal do Índice de Preços ao Consumidor Amplo - IPCA calculado pelo Instituto Brasileiro de Estatística e Geografia - IBGE. Os dados foram extraídos da base do Banco Central do Brasil e a amostra cobre o período entre Dez./1997 a Mar./2019. Portanto, a amostra é formada por 256 observações e esse tamanho é conveniente para a estimativa da DWT.⁸ As medidas de núcleo de inflação tradicionais também foram coletadas da base de dados do Banco Central do Brasil, a saber: núcleo por exclusão dos preços do subgrupo alimentação no domicílio e do segmento de administrados (IPCA-EX0); núcleo por exclusão de 10 dos 16 itens do subgrupo Alimentação no Domicílio, além dos itens combustíveis domésticos e combustíveis de veículos (IPCA-EX1); núcleo de dupla ponderação (IPCA-DP); e núcleo de médias aparadas com suavização (IPCA-MS).⁹

3 Resultados

3.1 Especificação dos Núcleos *Wavelets*

O primeiro passo na determinação do núcleo de inflação via o procedimento *wavelet* é definir o tipo e o tamanho do filtro utilizado e os níveis de detalhamento da transformada. A hipótese de estimação do sinal (núcleo) estocástico é $E\{R_l\} = 0$. Se a série $\{X_t\}$ não for estacionária de média zero, ela precisa ser diferenciada até que se alcance essa condição. O filtro Haar $L = 2$, que implica na primeira diferença, já seria suficiente para que a série do IPCA atenda a esse requerimento. O problema do filtro Haar, contudo, é não suavizar o periodograma o suficiente de maneira a evitar o espalhamento da variância entre as frequências. A solução é usar filtros mais extensos como os D(4) e LA(8). Levando em conta essas questões, o conjunto de filtros empregados nos exercícios é composto pelos filtros mais usuais: HAAR, D(4), D(6) e LA(8). O número de níveis J da transformada, equação (1) e (3), foi definido estar entre 2 e 4, sendo que seriam possíveis 8 para o tamanho da amostra em análise.

⁸ Uma das vantagens da MODWT é que, ao contrário da DWT, ela não requer que o tamanho da amostra seja dado por uma potência de dois. Contudo, esse requerimento dimensional da DWT também pode ser contornado, como descrito em Percival e Walden (2000, cap. 4) e utilizado no exercício de capacidade preditiva, discutido adiante. De qualquer forma, pode ser conveniente destacar interessante que o início da amostra situa-se no período intermediário entre a estabilização do Real (1994) e o início do Regime de Metas (1999).

⁹ Os códigos dessas séries para consulta no Sistema Gerenciador de Séries Temporais (SGS) do Banco Central do Brasil são os seguintes: IPCA (433), IPCA-EX0 (11427), IPCA-EX1 (16121), IPCA-DP (16122), IPCA-MS(4466).

Esses níveis abrigam ciclos de 2 meses até 2 anos e 8 meses. As flutuações acima desse horizonte são integralmente repassadas ao sinal (núcleo).

Além do tipo de filtro e do seu comprimento L , também há uma combinação de tipo de transformada, método de decomposição da série temporal e tipo e valor do limiar. Para tornar mais claras as especificações utilizadas e a escolha final, apresentam-se abaixo os Quadros 1 e 2 e a Figura 1. O Quadro 1 contém os métodos de extração do ruído discutidos na seção anterior, os filtros, a transformada e o esquema de limiar empregado. Essas escolhas são as básicas, mas outras questões também foram levadas em consideração, como a forma de tratar os coeficientes *wavelets* na fronteira, que são decorrentes das operações circulares do filtro. Nesse caso, as regras usuais foram aplicadas: periódica e de reflexão.

A literatura de núcleos de inflação sugere alguns critérios para a análise da qualidade de uma determinada medida candidata a representar um núcleo. Neste trabalho, a parte desse conjunto de sugestões para caracterizar um núcleo com boas propriedades corresponde ao seguinte: espera-se que o desvio padrão seja menor do que o da inflação; aproxime-se de uma média móvel; seja não enviesado em termos da média; siga trajetória independente no processo de correção dos desvios em relação à inflação e; possua capacidade preditiva. Os trabalhos nessa área não costumam estabelecer um ordenamento dos critérios a respeito da construção do núcleo. A avaliação habitual se baseia num conjunto de requerimentos ao invés de priorizar um único critério, como apontado em Ehrmann *et al.* (2018). Como destacam esses autores, um núcleo com desvio padrão muito reduzido, por exemplo, seria ótimo em termos de filtrar a volatilidade, contudo, seria muito pouco representativo em termos de capturar a tendência da inflação.

Os critérios citados acima aparecem frequentemente em trabalhos empíricos e adiante, onde se compara os núcleos *wavelets* estimados com as medidas tradicionais de núcleo, serão tratados mais formalmente. O objetivo fundamental nesse momento é discutir brevemente como esses critérios individualmente afetariam o resultado da escolha dos núcleos *wavelets* diante das diversas possibilidades registradas no Quadro 1. A título de ilustração, considere a Figura 1, que sintetiza algumas informações relevantes para a escolha dos núcleos *wavelets* IPCA-MIN e IPCA-UNI, os quais são descritos no Quadro 2. Nessa figura estão sendo mostrados dois critérios, a saber, o desvio padrão e o valor-p da estatística de teste da hipótese de que é a inflação que se adapta ao núcleo no processo dinâmico de correção dos desvios entre eles. A análise desses dois itens já exemplifica bem a flexibilidade do método *wavelet* na construção de um núcleo e, adicionalmente, aponta a repercussão das alternativas sobre os critérios. De maneira geral, dado um conjunto de parâmetros a serem atendidos por um núcleo, é possível fazer diversas combinações dentro do método *wavelet* de tal

forma que o núcleo obtido atenda aos requisitos exigidos da melhor forma possível.

Assim, ainda se referindo à Figura 1, o que aparentemente menos influencia os critérios são os métodos de determinação da magnitude do limiar para ajuste dos coeficientes da transformada *wavelet*, minimax e universal, principalmente quando o critério é relacionado a suavização, como é o caso do desvio padrão. Ao contrário, há uma diferença bastante significativa nos resultados por conta da forma de tratamento dos coeficientes remanescentes ao processo de limiarização. Por exemplo, o método *soft* produz núcleos com menor desvio padrão e o procedimento *hard*, na maioria das vezes, é favorável ao critério do ajustamento dinâmico. Outro fator importante é o tipo de transformada, DWT ou MODWT. Para o critério de suavização, a função MODWT é preferida, mas a DWT gera resultados melhores em termos de ajuste dinâmico. As possibilidades relacionadas ao nível de detalhamento da transformada (1 a 4) e o tipo de filtro (d4, ... s8, na Figura 1) também importam na escolha do núcleo adequado.

Em resumo, olhando para o critério do desvio padrão, a tendência é a combinação englobando a transformada MODWT, método de encolhimento *soft*, nível de detalhamento 4 e filtro Haar. Em termos do ajuste dinâmico, resultados mais favoráveis acontecem do lado da transformada DWT, *hard*, filtro d6 e nível de detalhamento acima de 2. Ainda que, por economia de espaço, a representação do conflito existente na escolha da especificação correta tenha se dado apenas para dois critérios, os demais citados acima também influenciam a opção para um lado ou para outro. Especificamente, a representação da média móvel adere ao perfil para o desvio padrão; a ausência de viés na média, por sua vez, relaciona-se ao ajustamento dinâmico, porém, apontando mais claramente em favor da transformada DWT e método *hard* e; erros de previsão menores se encontram na região de transformada MODWT com encolhimento *soft*, sem uma preferência clara no tocante ao tipo de filtro e ao nível de detalhamento da transformada.

Quadro 1 – Especificações testadas

Método de suavização	Filtro <i>wavelet</i>	Transformada	Encolhimento
UNIVERSAL	HAAR, D(4), D(6), D(8), LA(8)	DWT, MODWT	<i>soft, hard</i>
MINIMAX	HAAR, D(4), D(6), D(8), LA(8)	DWT, MODWT	<i>soft, hard</i>
SURE	HAAR, D(4), D(6), LA(8)	DWT, MODWT	<i>soft</i>
VALIDAÇÃO CRUZADA	HAAR, D(4), D(6), LA(8)	DWT, MODWT	<i>soft, hard</i>
BAYES1	HAAR, D(4), D(6), D(8)	DWT, MODWT	<i>median</i>
BAYES2	HAAR, D(4), D(6), LA(8)	DWT, MODWT	<i>median, mean, hard, soft</i>

Nota: BAYES1 e BAYES2 referem-se, respectivamente, aos modelos de [Abramovich et al. \(1998\)](#) e [Johnstone e Silverman \(2005b\)](#). Nas estimações BAYES1, os valores usados para os hiperparâmetros α e β , que determinam a *prior* dos coeficientes *wavelets*, foram os seguintes: $\alpha = 0,5$; $\beta = 1$.

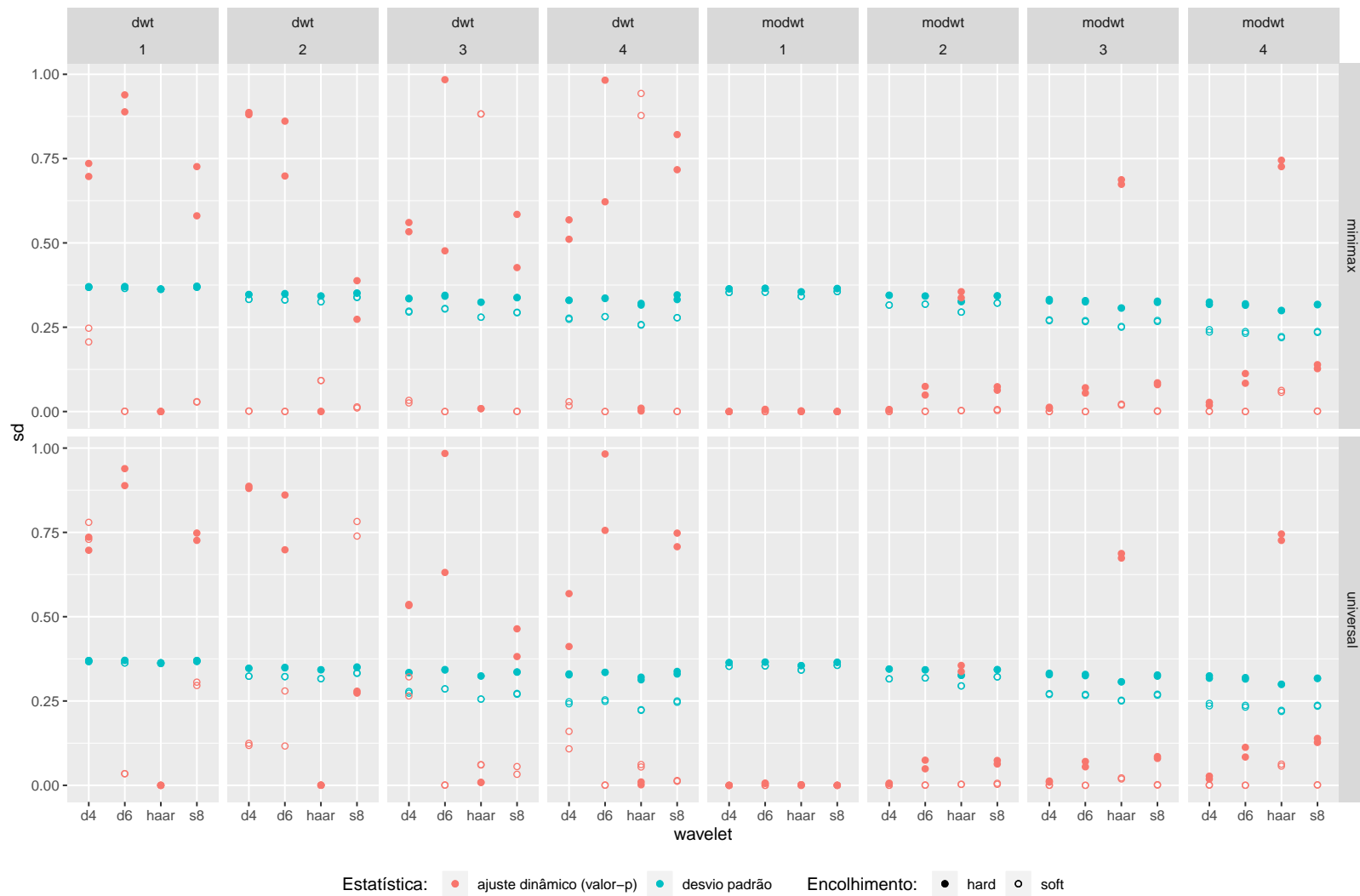


Figura 1 – Especificações e resultados dos modelos para determinação do IPCA-MIN e IPCA-UNI.

Resultante da discussão acima, o Quadro 2 resume as especificações finais dos núcleos aqui denominados *wavelets*. Escolheram-se as alternativas que apresentaram melhor desempenho em termos do balanceamento de menor variância, adequação à representação de média móvel, inexistência de viés na média, independência no processo de ajustamento dinâmico e melhor capacidade preditiva. Considerando máximos e mínimos, os valores de cada um desses critérios, para cada combinação específica do Quadro 1 e para cada tipo de núcleo do Quadro 2, foram reescalados de forma a situar-se no intervalo 0 a 1. Para definir a melhor alternativa, a cada um desses valores foi dado peso igual mas, eventualmente, maior importância foi atribuída a um determinado critério para fins de obtenção de estatísticas mais favoráveis. Por exemplo, ao núcleo IPCA-MIN se atribuiu os pesos 1,5 para tornar os critérios de ausência de viés e ajustamento dinâmico significativos. Então, essas séries foram denominadas de núcleo *wavelet* e serão comparadas às medidas usuais na subseção 3.2.

Quadro 2 – Especificações escolhidas

Núcleo <i>wavelet</i>	Filtro <i>wavelet</i>	Nível	Transformada	Encolhimento
IPCA-UNI	HAAR	4	DWT	<i>HARD</i>
IPCA-MIN	D(6)	4	DWT	<i>HARD</i>
IPCA-SURE	HAAR	3	DWT	<i>SOFT</i>
IPCA-CV	D(6)	3	DWT	<i>SOFT</i>
IPCA-BAYES1	D(4)	4	DWT	<i>MEDIAN</i>
IPCA-BAYES2	D(6)	4	DWT	<i>HARD</i>

Nota: IPCA-UNI, IPCA-MIN, etc., correspondem aos núcleos de inflação calculados de acordo com os métodos de extração do ruído apresentados no Quadro 1. Na regra BAYES1, os coeficientes *wavelets* são submetidos ao processo de limiarização em todos os níveis, porém, estabeleceu-se o nível máximo de 3 para acessar o limiar universal que é usado no método de Bayes empírico para obtenção dos hiperparâmetros do modelo.

A Figura 2 mostra o formato desses núcleos *wavelets* juntamente com o IPCA e as medidas tradicionais de núcleo.^{10,11} De maneira geral, as séries construídas pela eliminação do ruído tendem a exibir bem menos pontos de inflexão, sendo mais suaves que os núcleos convencionais. A suavização é bem sucedida na medida em que os choques de curto prazo são excluídos e os pontos que requerem maior atenção da política monetária são preservados. Por exemplo, nota-se que a inflação no período

¹⁰ O Apêndice contém detalhes adicionais da transformada DWT necessária para a construção dos núcleos, intervalo de confiança (credibilidade) para o núcleo IPCA-BAYES1 e o valor do limiar para o IPCA-BAYES2.

¹¹ Os resultados da transformada *wavelet* e da eliminação do ruído por decomposição *wavelet* foram obtidos por meio do software R, R Core Team (2017). As implementações foram feitas com o auxílio dos seguintes pacotes: wmtsa, Constantine e Percival (2016); wavethresh, Nason (2016); waveslim, Whitcher (2015); e EbayesThresh, Johnstone e Silverman (2005a).

da transição política no final de 2002 e início de 2003 é menos atenuada nos núcleos *wavelets*. Portanto, para esse período, esses núcleos corroboram a ideia de aumentar a taxa de juros para sinalizar o compromisso da política monetária com a redução da inflação e coordenação de expectativas.¹² A manutenção desses picos nos núcleos de inflação pode ser importante. A DWT requer poucos coeficientes para capturar esses picos, evitando a diluição dos mesmos em diversos períodos, como se observa em médias móveis, por exemplo.

¹² O argumento é similar ao o utilizado por Bullard (2011) para a economia americana. Segundo Bullard (2011), na crise financeira de 2008 o núcleo por exclusão diminuiu menos do que a inflação e essa mensuração do núcleo poderia indicar que a reação da política monetária deveria ter sido bem menos agressiva do que de fato ocorreu na flexibilização quantitativa do Comitê Federal de Mercado Aberto (FOMC). Para contornar esse problema, o autor recomenda núcleos que não envolvam a exclusão de preços considerados problemáticos. O método *wavelet* aqui utilizado atende a esse requerimento.

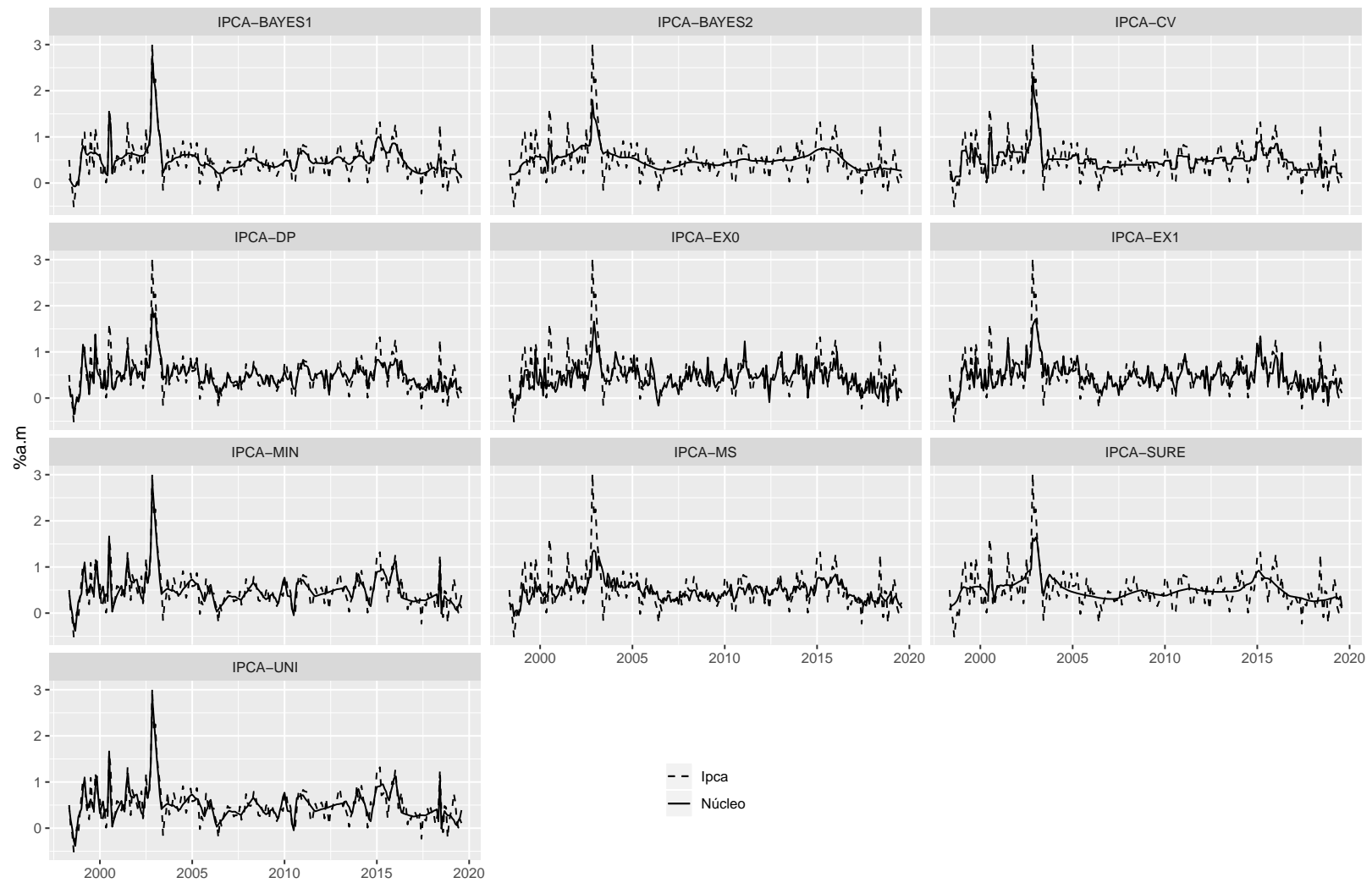


Figura 2 – IPCA e núcleos de inflação tradicionais e *wavelets*.

3.2 Avaliação dos Núcleos *Wavelets* e Comparação com as Medidas Tradicionais

A Tabela 1 fornece um conjunto de estatísticas descritivas da inflação e dos núcleos.¹³ Percebe-se que a média de cada núcleo derivado pelo método *wavelet* é bem próxima à da inflação. Essa igualdade é estatisticamente comprovada pelo valor-p do teste de médias contido na última coluna da Tabela 1. Como destacado por Baqaee (2010), por construção, o viés nos núcleos de inflação por *wavelets* é extremamente limitado, decorrente apenas do tratamento de alguns poucos coeficientes de fronteira, cujo impacto na média geral é negligenciável. O núcleo tradicional IPCA-EX0 não atende a esse requerimento. Nota-se que por meio da suavização *wavelet* é possível se obter núcleos com o desvio padrão de magnitude similar aos núcleos usuais, os quais tendem a ser menos voláteis que a inflação.

Tabela 1 – Estatísticas descritivas para a inflação e medidas de núcleo (Dez./1997 a Mar./2019)

Inflação e núcleo	Média	Mín.	Máx.	Desvio padrão	Coef. de variação	Teste de médias
IPCA	0.51	-0.51	3.02	0.39	0.77	-
<i>Núcleos tradicionais</i>						
IPCA-DP	0.49	-0.35	1.95	0.28	0.56	0.65
IPCA-EX0	0.44	-0.16	1.66	0.27	0.60	0.04
IPCA-EX1	0.49	-0.17	1.71	0.28	0.58	0.50
IPCA-MS	0.48	-0.07	1.36	0.20	0.42	0.37
<i>Núcleos wavelets</i>						
IPCA-BAYES1	0.51	-0.21	2.77	0.29	0.57	1.00
IPCA-BAYES2	0.51	-0.19	2.85	0.33	0.65	1.00
IPCA-CV	0.51	-0.19	2.00	0.26	0.51	0.96
IPCA-MIN	0.50	-0.22	3.03	0.33	0.67	0.95
IPCA-SURE	0.51	0.06	2.27	0.26	0.52	1.00
IPCA-UNI	0.51	-0.19	3.16	0.29	0.57	1.00

Nota: Na coluna denominada teste de médias, os números tabulados informam os valores-p do teste de diferença entre médias sob a hipótese de heterogeneidade da variância entre o respectivo núcleo e o IPCA.

Uma propriedade desejável de um núcleo é a capacidade de o mesmo capturar a tendência da inflação. A medida utilizada nesse critério é a raiz do erro médio quadrático (RMSE) da diferença entre o núcleo e a tendência da inflação, suposta ser bem representada por uma média móvel centrada. O erro absoluto médio (MAD) também é empregado. Sob essa hipótese, erros menores significam núcleos melhores, Silva Filho e Figueiredo (2011).

¹³ Em procedimento similar ao trabalho de Santos e Castelar (2016) e Denardin *et al.* (2016), os resíduos de todos os núcleos de inflação apresentados foram submetidos e passaram no teste de estacionaridade. Optou-se, assim, pela omissão dessa análise preliminar.

A Figura 3 mostra essas estimativas utilizando-se 13, 25 e 37 meses na obtenção da média móvel centrada. Períodos maiores são usualmente escolhidos por suavizarem as flutuações de alta frequência e englobarem o horizonte de repercussão da política monetária. O núcleo denominado IPCA-CV é o melhor quando a média móvel é calculada para 13 meses. A volatilidade dessa série é apenas cerca de 40% a da inflação medida pelo IPCA. Aumentando o número de meses para 25 e 37, a volatilidade do núcleo IPCA-MS é menor do que os demais. Os núcleos baseados na suavização por ondaletas apresentam erros um pouco superior ao IPCA-MS, mas não muito diferentes dos demais núcleos tradicionais. Portanto, pelo método de extração do ruído por ondaletas pode-se obter um núcleo com a propriedade de tendência tão boa quanto aos núcleos usuais. Como visto, não há retenção excessiva de volatilidade ou suavização demasiada que resultaria em perda de informação de médio prazo, horizonte importante para os propósitos de política monetária.

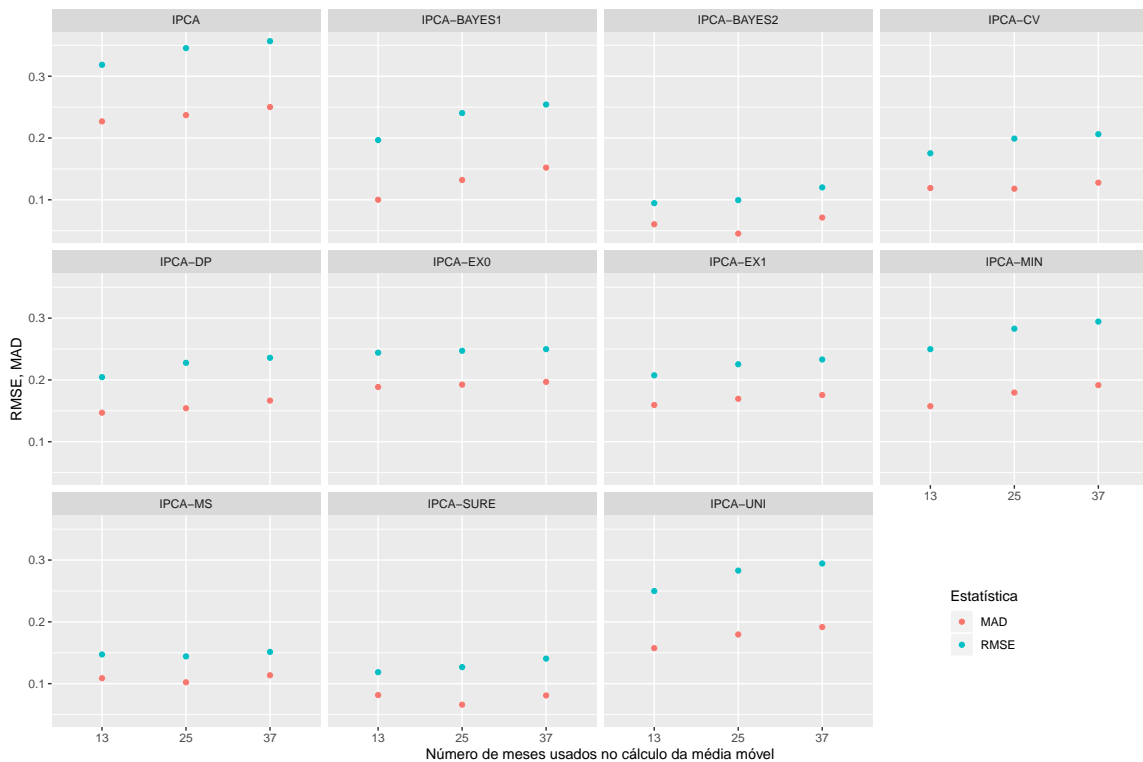


Figura 3 – Desvios do núcleo e da inflação em relação à média móvel centrada. RMSE é o erro quadrático médio e MAD o erro absoluto médio.

Outro critério de avaliação de um núcleo é a ausência de viés. A Tabela 1 apresentou uma primeira aproximação desse critério. A Figura 4, porém, complementa essa análise mostrando os coeficientes, o teste F da hipótese nula conjunta $\alpha = 0$; $\beta = 1$; e o coeficiente R^2 ajustado da regressão $\pi_t = \alpha + \beta\pi_t^* + \epsilon_t$, onde π e π^* expressam a inflação e o núcleo, respectivamente. Nenhum núcleo construído

pelo método *wavelet* é enviesado, com coeficientes β próximos a 1 e $\alpha = 0$. Por outro lado, os núcleos IPCA-MS, IPCA-EX0, IPCA-EX1 e IPCA-DP mostram-se estatisticamente enviesados.

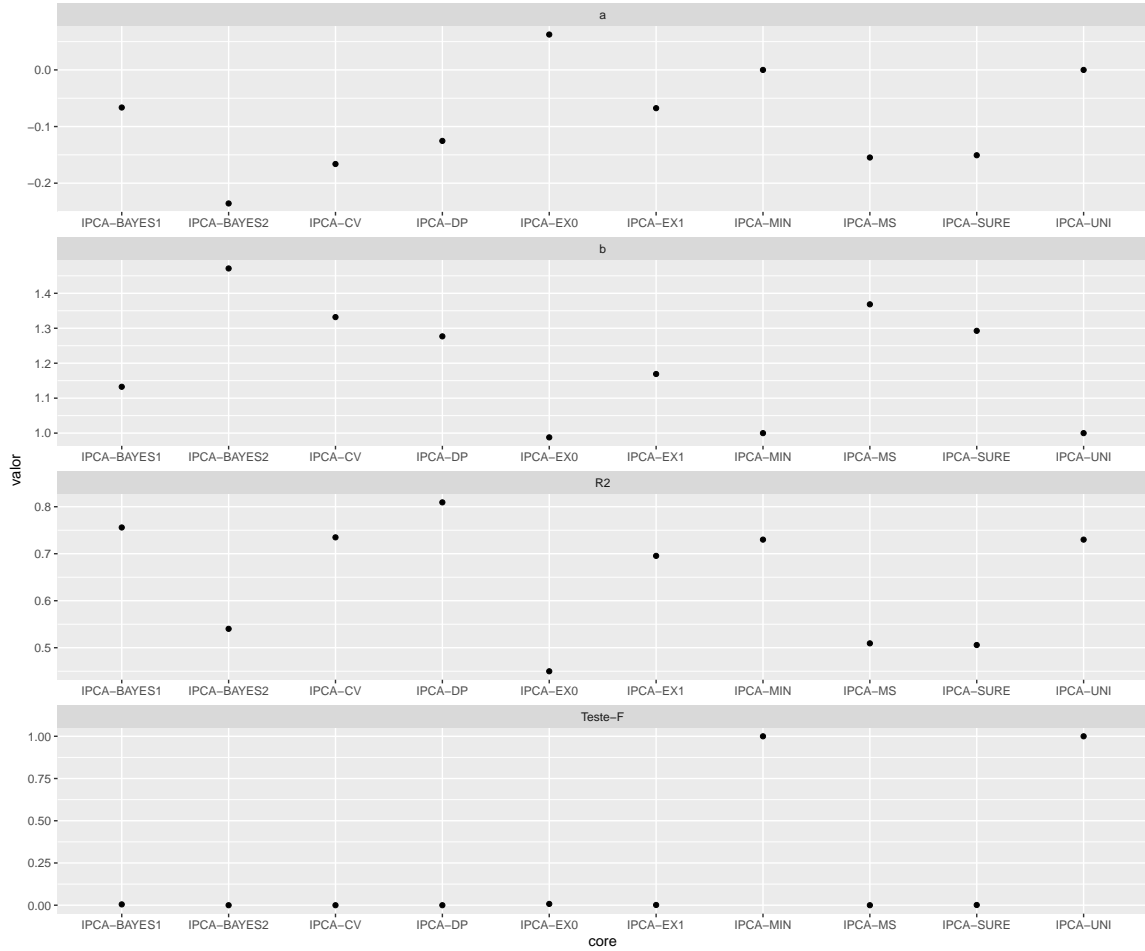


Figura 4 – Ausência de viés. Resultados da regressão $\pi_t = \alpha + \beta\pi_t^* + \epsilon_t$, onde π e π^* expressam a inflação e o núcleo, respectivamente. O gráfico denominado Teste-F mostra o valor-p do teste F da hipótese nula conjunta $\alpha = 0$; $\beta = 1$. Todas as medidas de núcleo *wavelet* são não enviesadas.

Além de não enviesado, um núcleo deve ter a propriedade de neutralidade na dinâmica de longo prazo da correção dos desvios em relação à inflação. A neutralidade é no sentido de o processo de ajuste esperado ser de movimentos isolados da inflação em direção ao núcleo. O modelo comumente utilizado na literatura para verificação dessa propriedade é da seguinte forma:

$$\pi_{t+h} - \pi_t = a_0 + \lambda_h(\pi_t - \pi_t^*) + \sum_{i=1}^k a_i \pi_{t-i} + e_{1,t+h}, \quad (12)$$

$$\pi_{t+h}^* - \pi_t^* = b_0 + \lambda_h^*(\pi_t - \pi_t^*) + \sum_{i=1}^k b_i \pi_{t-i}^* + e_{2,t+h}, \quad (13)$$

onde π_{t+h} e π_{t+h}^* são, respectivamente, a inflação e o núcleo h períodos à frente de t ; a_0 e b_0 parâmetros; k o número de defasagens; e $e_{1,t+h}$, $e_{2,t+h}$ erros aleatórios. O resultado esperado é $\lambda_h < 0$ e $\lambda_h^* = 0$, o que implica que a diferença entre a inflação e o núcleo é dinamicamente corrigida por movimentos de π na direção de π^* , sem contrapartida do último.

As Figuras 5 e 6 mostram dois resultados da regressão para as duas equações acima, a saber, o coeficiente λ_h e o valor-p do teste t para $\lambda_h^* = 0$, respectivamente. O valor de k , dado h , foi determinado pelo critério Akaike (AIC) para defasagens de no máximo dois anos e h variando de 1 a 24 meses. O que se nota é que $\lambda_h < 0$ vale para todos os núcleos (o valor-p do teste t, não reportado, indica que todos os coeficientes são significativos ao nível de 1%). Entretanto, ao nível de significância de 5% e considerando todos os h 's, a segunda condição $\lambda_h^* = 0$ é satisfeita com mais frequência pelos núcleos *wavelets*, exceto IPCA-CV. Muitos núcleos *wavelets* superam esse requerimento para praticamente todos os horizontes considerados. Uma possível interpretação para esse resultado pode ser a seguinte: como o método não se baseia na eliminação de alguns produtos, *a priori* mais voláteis ou mais suscetíveis da presença de choques transitórios, minimiza-se o risco de que o aumento de custo nos produtos integrantes do núcleo, decorrente de um choque persistente nos produtos excluídos (alimentos e preços administrados, por exemplo), faça com que o mesmo responda às variações da inflação. Mishkin (2007) destacou a importância de se estar ciente desse risco na construção de um núcleo por exclusão.

A capacidade de um determinado núcleo em prover informação adicional no processo de previsão da inflação pode qualificar o mesmo para, eventualmente, ser incorporado ao conjunto de variáveis observadas na condução da política monetária. Esse requisito preditivo é desafiador para um candidato a núcleo de inflação dada a tendência de modelos mais parcimoniosos se sobressaírem em termos de previsão. O teste aplicado nesse caso consiste em verificar se, condicional à inflação passada, o núcleo melhora a estimativa da inflação futura. Para abordar esse ponto, a previsão da inflação é baseada na seguinte equação:

$$\pi_{t+h} = \alpha + \sum_i^p \beta_i \pi_{t-i+1} + \sum_j^q \gamma_j \pi_{t-i+1}^* + e_{t+h}, \quad (14)$$

onde $h = 1, \dots, 24$ representa o horizonte de previsão. A previsão da inflação para o período $t + h$ é obtida por primeiro se estimar os parâmetros de (14) usando

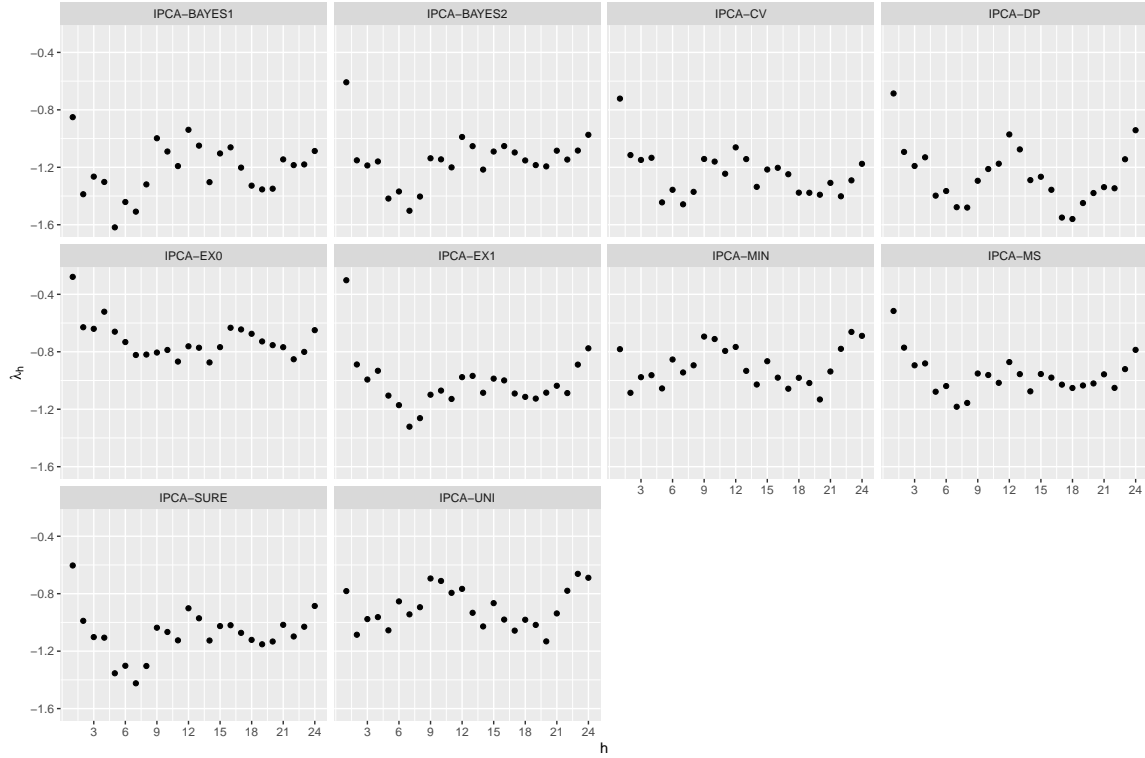


Figura 5 – Coeficiente de ajustamento da inflação em direção ao núcleo. Valor de λ_h da equação (12) para h variando de 1 a 24 meses. Observando o valor-p (não reportado), λ_h é estatisticamente significativo para todas as definições de núcleo e para todo h .

dados até t , inclusive. Computa-se, então, o respectivo erro de previsão. No período seguinte, $t + h + 1$, os coeficientes do modelo e os núcleos *wavelets* são atualizados pois, agora, a estimativa se baseia nas informações disponíveis até $t + 1$. Esse processo é repetido para um determinado número de vezes e implica no uso da informação que estaria disponível no exercício de previsão em cada ponto do tempo excluindo a informação futura. A comparação dessa estimativa é com um modelo similar a (14) sem a inclusão, porém, dos termos associados ao núcleo, π^* . Em cada horizonte h considerado, o número de defasagens p e q foi determinado pelo critério AIC, admitindo-se defasagens de até um ano. Para o cálculo do RMSE, a função de perda utilizada para avaliar a performance preditiva, é necessário estabelecer o número de previsões fora da amostra, k , sendo esse 24 observações.

O resultado desse exercício está registrado na Tabela 2. A conclusão é que, de maneira geral, nenhuma previsão em tempo real é mais precisa do que outra entre os núcleos tradicionais e *wavelets*. A performance relativa dos núcleos não difere muito entre os horizontes de previsão. Outro aspecto importante é que esses núcleos não geram previsões piores do que as obtidas de um modelo mais parcimonioso em que

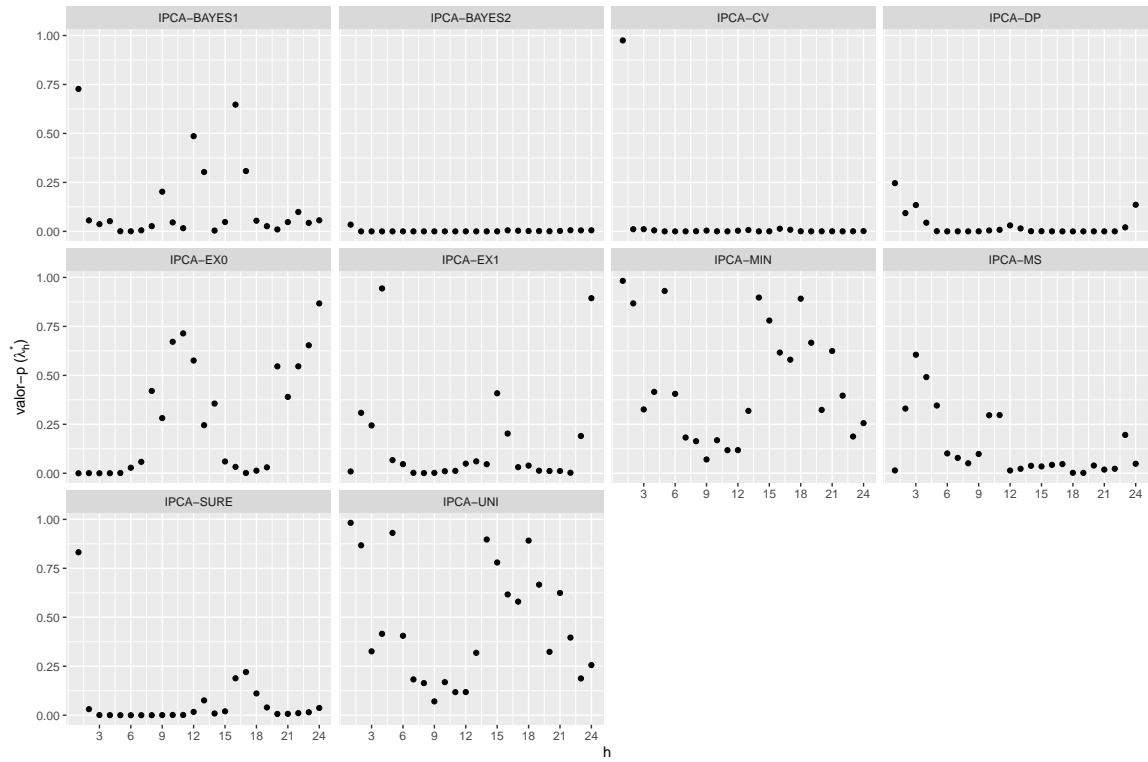


Figura 6 – Significância do coeficiente de ajustamento do núcleo em direção à inflação. Valor-p do teste t de λ_h^* da equação (13) para h variando de 1 a 24 meses. A linha tracejada indica significância de 5%.

apenas a inflação é considerada. Ao contrário, em alguns casos ocorre um leve ganho em relação ao modelo autoregressivo.

Tabela 2 – Erro quadrático médio relativo: modelo com núcleo / autoregressivo

h	IPCA-BAYES1	IPCA-BAYES2	IPCA-CV	IPCA-DP	IPCA-EX0	IPCA-EX1	IPCA-MIN	IPCA-MS	IPCA-SURE	IPCA-UNI
1	1.33	0.97	1.06	0.99	1.00	1.00	0.95	0.98	0.97	0.91
2	0.97	0.98	0.96	0.97	1.00	0.98	1.01	0.94	0.95	0.94
3	0.97	0.96	0.95	0.98	1.02	0.99	0.99	0.98	0.99	0.97
4	1.02	0.92	0.98	1.00	1.05	1.02	0.95	0.99	0.99	0.96
5	1.01	0.96	0.99	1.00	1.04	1.01	0.98	0.98	0.97	0.98
6	1.00	0.99	1.00	0.99	1.02	1.02	1.02	0.98	0.97	1.00
7	0.99	0.92	0.99	1.00	1.02	0.99	0.99	0.99	0.96	1.00
8	0.99	0.94	0.99	1.00	1.03	1.02	1.00	0.99	0.97	1.00
9	0.99	0.95	1.00	1.00	1.00	1.01	1.00	1.00	0.98	0.99
10	0.99	0.96	0.99	1.00	1.00	0.99	1.00	1.01	0.96	0.98
11	0.97	0.98	0.98	1.01	1.01	0.98	1.02	1.01	0.98	1.00
12	0.97	0.98	0.98	1.03	0.99	0.99	1.01	1.01	1.00	1.02
13	0.97	0.99	0.98	0.99	1.00	1.00	1.00	1.02	1.00	1.01
14	0.99	1.00	1.00	0.99	1.00	1.00	1.00	1.03	1.03	1.01
15	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.01	1.03	1.00
16	1.00	1.00	1.00	1.02	1.02	1.00	1.01	1.04	1.03	1.00
17	1.00	0.99	1.01	1.05	1.02	1.01	1.01	1.05	1.03	1.00
18	1.00	0.99	1.00	1.00	1.02	1.03	1.02	1.02	1.03	1.00
19	1.01	0.99	1.00	1.00	1.02	1.00	1.01	1.01	1.03	1.00
20	1.02	1.00	0.99	1.00	1.01	1.00	1.01	1.00	1.05	1.02
21	1.01	1.00	0.99	1.00	1.00	1.02	1.00	1.00	1.04	1.00
22	1.03	1.04	1.00	1.00	1.00	1.00	1.01	1.00	1.07	1.00
23	1.03	1.03	1.02	1.24	1.00	0.98	1.01	0.98	1.04	1.00
24	1.02	1.02	1.00	1.22	0.99	0.98	1.01	0.96	1.03	0.99

4 Núcleo Híbrido

Os resultados acima são mais favoráveis aos núcleos *wavelets*. Essa vantagem parece decorrer do fato de esses núcleos serem obtidos a partir de uma gama grande de possibilidades presentes num processo estatístico sofisticado para separar os componentes sinal e ruído da série de inflação. Por outro lado, uma desvantagem é que, ao contrário dos núcleos tradicionais, as medidas obtidas por esse método são passíveis de revisão a cada nova observação incorporada ao conjunto de dados. Levando em conta que, como será visto adiante, os núcleos tradicionais não eliminam o suficiente os ciclos de alta frequência e os núcleos *wavelets* sofrem revisões ao longo do tempo, a ideia de se obter um núcleo via um procedimento híbrido pode ser interessante. Mais especificamente, os núcleos convencionais seriam submetidos a um ajuste suplementar no qual a eles se aplicariam as mesmas técnicas *wavelets* que forma usadas anteriormente no IPCA. Esta seção explora essa possibilidade.

Inicialmente, cabe identificar a diferença básica, do ponto de vista da separação sinal-ruído, entre os núcleos *wavelets* e os núcleos tradicionais. Para fins de discussão, a comparação ocorre entre os núcleos IPCA-MS e IPCA-BAYES2. Enquanto essa escolha pode parecer arbitrária, outras combinações entre núcleos tradicionais e *wavelets* produzem conclusões semelhantes. A análise ocorre em termos dos coeficientes *wavelets*. Assim, o resultado da transformada MODWT desse dois núcleos e do IPCA aparece na Figura 7. A inspeção visual sugere que o método de construção do IPCA-MS tende a redistribuir e redimensionar os coeficientes das frequências mais altas ao longo do tempo (coeficientes d1 a d3; ciclos de 2 a 16 meses). Do lado do núcleo *wavelet* IPCA-BAYES2, esses coeficientes são tratados de duas formas: ou são reduzidos a próximo de zero, como ocorre em boa parte da amostra, ou são preservados em magnitude similar ao coeficiente original, como se observa no início das anos 2000 e depois de 2018. Portanto, do ponto de vista do método *wavelet*, o núcleo IPCA-MS não se caracteriza como um processo de separação da inflação observada entre sinal e ruído.

Se a vantagem do IPCA-BAYES2 é ser derivado de um processo estatístico bem definido de separação entre sinal e ruído, a desvantagem é que a série pode variar ao longo do tempo. Isso ocorre porque o tamanho dos coeficientes e o valor do limiar mudam quando novos dados são acrescentados à série. Os dois gráficos superiores da Figura 8 fornecem uma aproximação visual da alteração do núcleo IPCA-BAYES2. Os gráficos superior esquerdo e direito foram construídos pela sobreposição das séries provenientes do cálculo do núcleo para os últimos cinco (60 meses) e três anos (36 meses), respectivamente, com atualização mensal. Como se pode observar, há um pequeno custo de revisão associado aos núcleos *wavelets*.

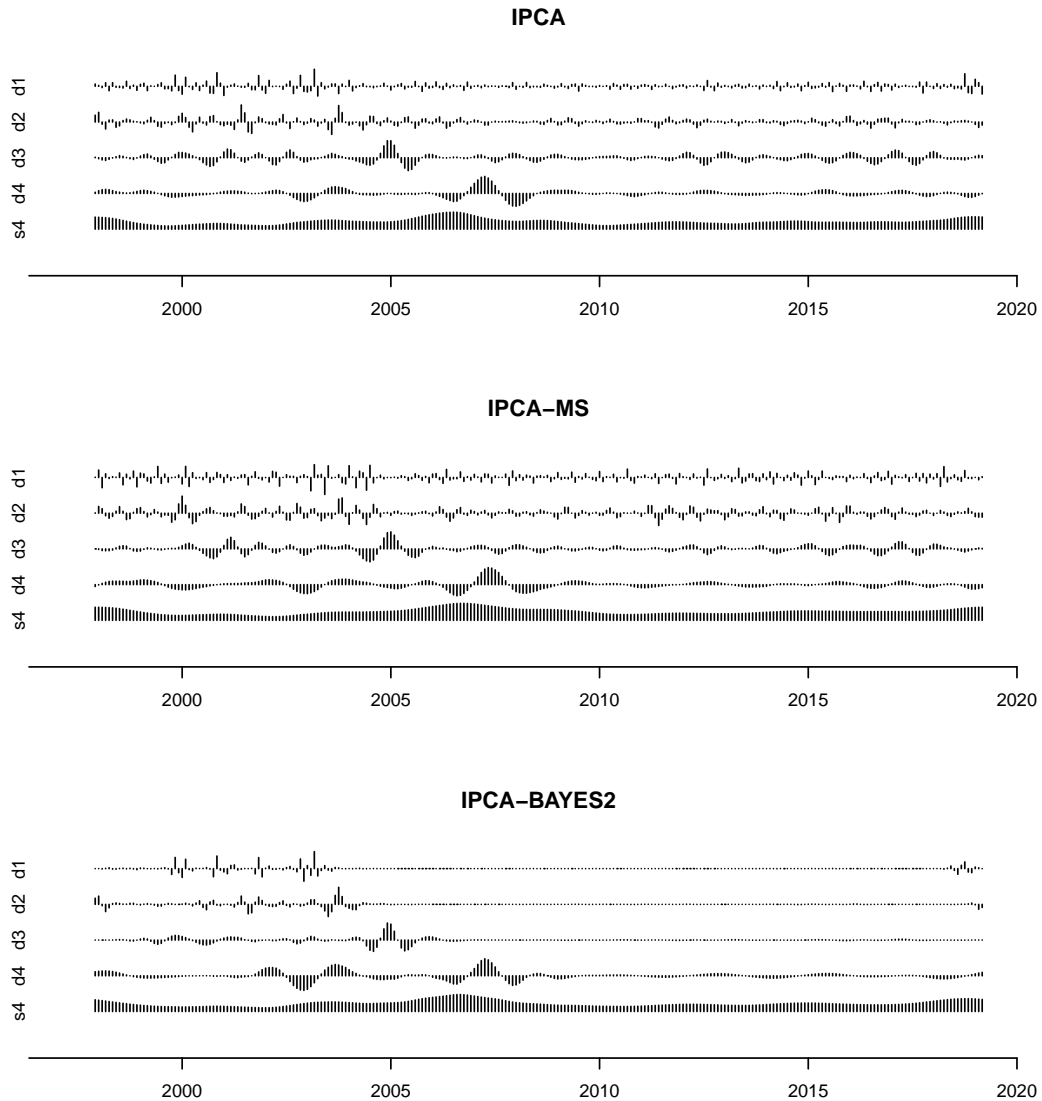


Figura 7 – Transformada MODWT do IPCA, IPCA-MS e IPCA-BAYES2

Dado o conflito existente entre a estimação eficiente do sinal versus as revisões ao longo do tempo, verifica-se a alternativa de um procedimento híbrido no qual os núcleos convencionais são ajustados por meio das técnicas *wavelets*. Por exemplo, na parte inferior da Figura 8 aparece a sobreposição do IPCA-MS ajustado pelo mesmo procedimento e especificação do IPCA-BAYES2. A variação temporal desse núcleo, que poderia ser chamado de IPCA-MSW para fins de diferenciação, é menor do que o do IPCA-BAYES2 e a sua transformada *wavelet* tem perfil semelhante a esse último - da forma como apresentado na Figura 7. Ou seja, os coeficientes dos ciclos de alta frequência desse núcleo híbrido são bastante atenuados e o custo em termos de modificações da série é menor comparado aos núcleos *wavelets*. Adicionalmente,

comparado ao IPCA-MS, o IPCA-MSW melhor situa-se dentro da banda de percentil 50% do IPCA-BAYES2, obtida de um procedimento *bootstrap* paramétrico com 10.000 réplicas dos erros de um modelo arima da inflação e recálculo do núcleo, conforme Figura 9.

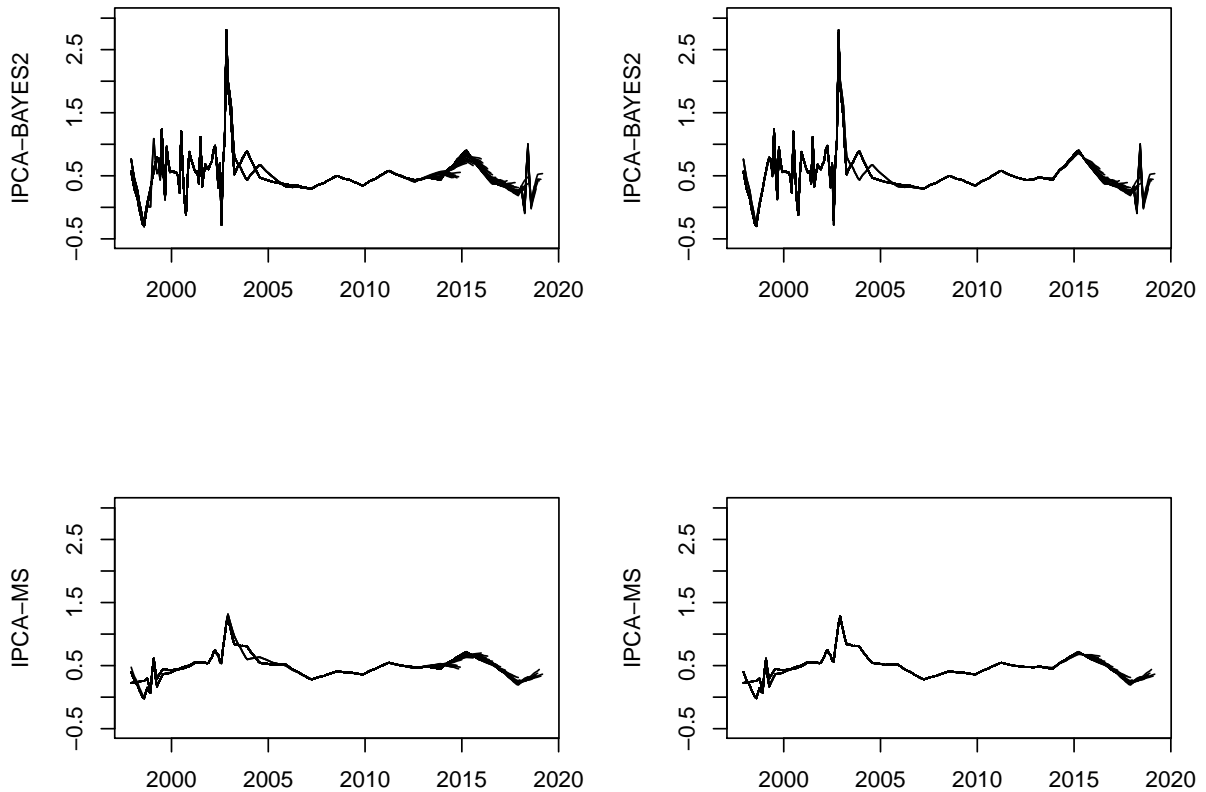


Figura 8 – Variação do núcleo IPCA-BAYES2 e do IPCA-MS ajustado por *wavelets*

O núcleo híbrido, chamado neste trabalho de IPCA-MSW, tem melhor performance do que o IPCA-MS quando submetido aos mesmos testes apresentados anteriormente. O desvio padrão e o coeficiente de variação diminuem, o erro quadrático médio em relação às médias móveis de 13, 25 e 37 meses também é menor e maior é a independência no processo de ajustamento dinâmico. O resultado em termos de capacidade preditiva apresenta leve melhora no horizonte de dois trimestres quando comparado ao IPCA-MS e aos outros núcleos *wavelets*. A não ausência de viés ainda persiste pois, como mencionado anteriormente, o procedimento *wavelet* tende a inalterar a média. Portanto, um procedimento *wavelet* complementar aplicado aos núcleos tradicionais poderia ser de grande valia para que os mesmos possam atender melhor

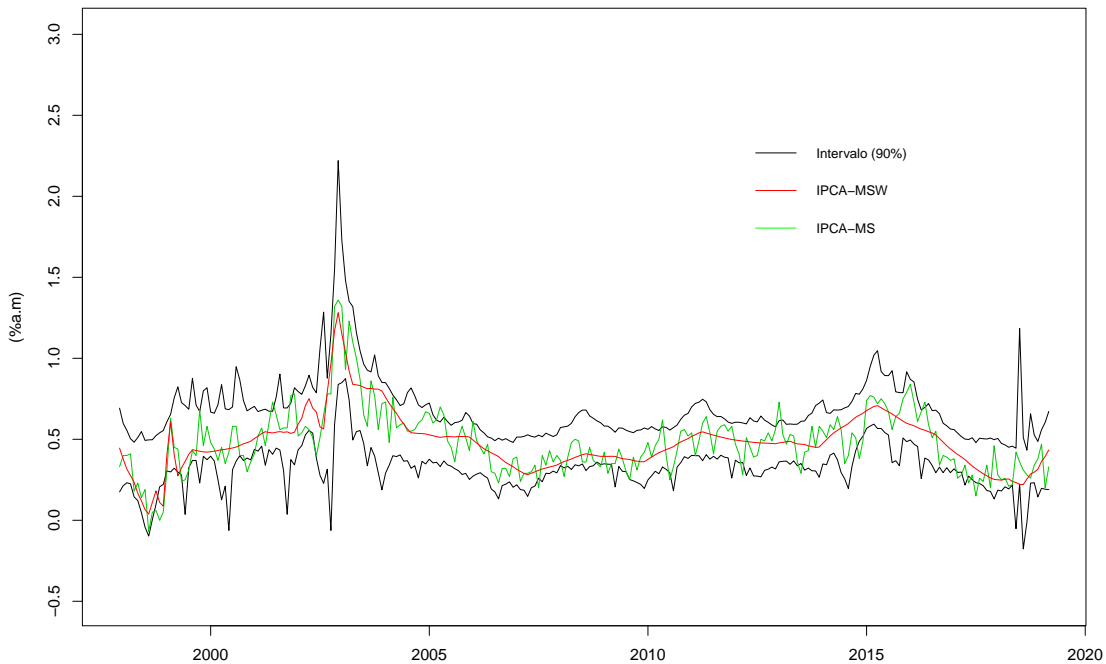


Figura 9 – Intervalo do IPCA-BAYES2 para um modelo arima do IPCA

muitos dos requisitos estatísticos discutidos na literatura de núcleos de inflação. Além de estatísticas mais favoráveis, também podem ser interpretados como derivados de um procedimento de separação entre sinal (núcleo) e ruído (choques). Ainda que não elimine o efeito adverso das revisões moderadas ao longo do tempo, o procedimento *wavelet* aplicado ao núcleo, ao invés do IPCA diretamente, reduz o impacto dessas mudanças na série obtida. Outro ponto a destacar é que esse procedimento, por ser acessório, seria mais fácil de ser comunicado ao público do que um núcleo obtido diretamente da aplicação de *wavelets* ao IPCA.

5 Conclusão

Neste artigo aplicou-se na série do IPCA e nos núcleos tradicionais técnicas de eliminação do ruído baseadas na decomposição por ondaletas (*wavelets*) para se estimar medidas adicionais de núcleos de inflação. Os núcleos obtidos diretamente da decomposição *wavelet* do IPCA, ou de maneira híbrida para incrementar a *performance* do núcleo de média móvel com suavização em termos de eliminação dos choques de alta frequência remanescentes, têm o potencial de incrementar as estimativas oficiais em termos de representação da tendência e de capacidade de prover informação adicional para antecipação dos movimentos futuros dos preços ao

consumidor. Esses resultados corroboram outros existentes na literatura nacional e internacional, ratificando a utilidade de se continuar estudando e desenvolvendo núcleos construídos dessa forma para que sirvam de indicadores auxiliares na condução da política monetária.

APÊNDICE

1 Transformada DWT do IPCA

A Figura 10 mostra os elementos do vetor de coeficientes da transformada *wavelet* DWT-parcial do IPCA para as diversas especificações escolhidas no primeiro passo do processo de encolhimento dos coeficientes, conforme Quadro 2. O título de cada gráfico informa apenas o respectivo núcleo a que se refere a transformada do IPCA e o respectivo filtro utilizado. Para melhor visualização, os coeficientes estão escalonados por nível e não em termos globais. O número de coeficientes em cada vetor é dado por $256/2^j$, $j = 1, 2, 3$. Os coeficientes em s são relacionados à média do IPCA e os em d_j são associados à diferenças entre médias ponderadas na escala $\tau_j = 2^{j-1}$ meses.

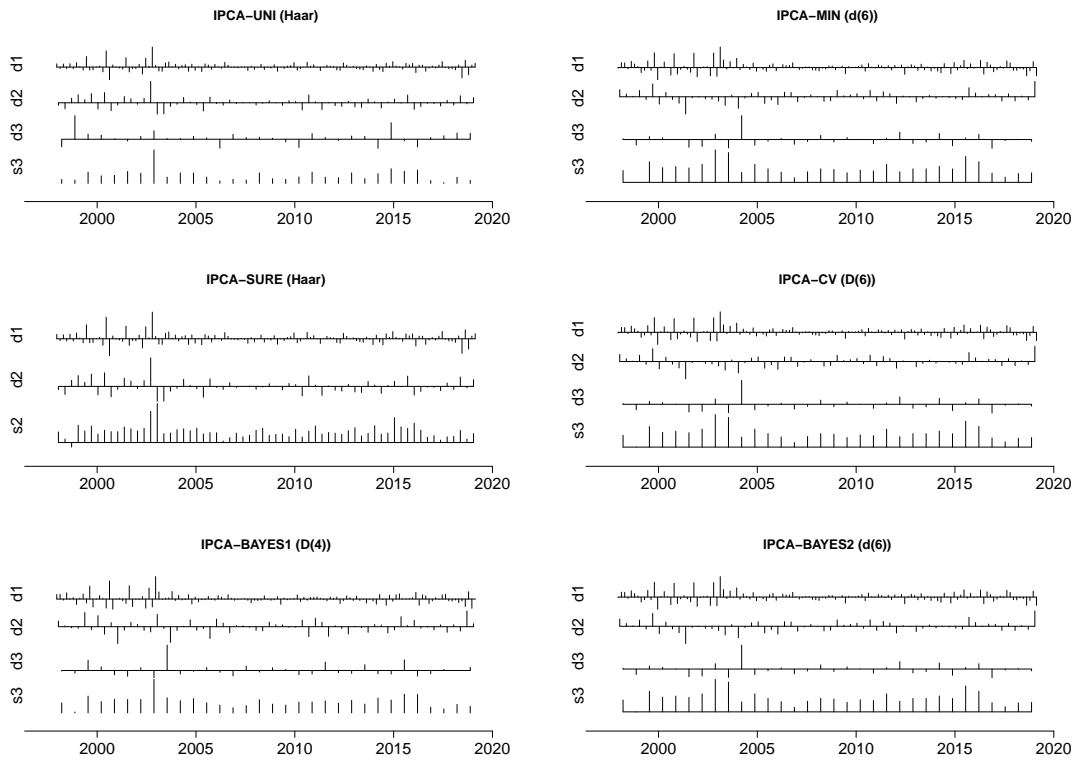


Figura 10 – Transformada DWT do IPCA

2 Intervalo de Confiança para o Núcleo IPCA-BAYES1

O intervalo de confiança (credibilidade) para o núcleo IPCA-BAYES1 estimado pelo método de limiarização bayesiano de [Abramovich *et al.* \(1998\)](#) está contido na Figura 11. O método para a obtenção do intervalo de confiança foi desenvolvido por [Barber *et al.* \(2002\)](#) e a implementação computacional se baseia em [Barber \(2012\)](#). Como se observa, a 80% de credibilidade diversos pontos da inflação estão situados fora no intervalo de confiança. Esse resultado exemplifica a discussão sobre se a melhor referência para a meta de inflação é um índice cheio ou o seu núcleo. Por exemplo, [Bullard \(2011\)](#) defende que nos Estados Unidos, assim como ocorre em muitos outros países, a autoridade monetária deveria fixar uma meta explícita para a inflação cheia, contra argumentado a visão oposta de [Mishkin \(2007\)](#). A defesa do índice cheio se baseia na ideia de que o objetivo da estabilidade de preços não é o núcleo, mas sim a inflação medida pelo índice de preços. Nessa linha, o banco central deveria se focar nesse índice que é acompanhado e repercute nas decisões econômicas dos indivíduos e empresas.

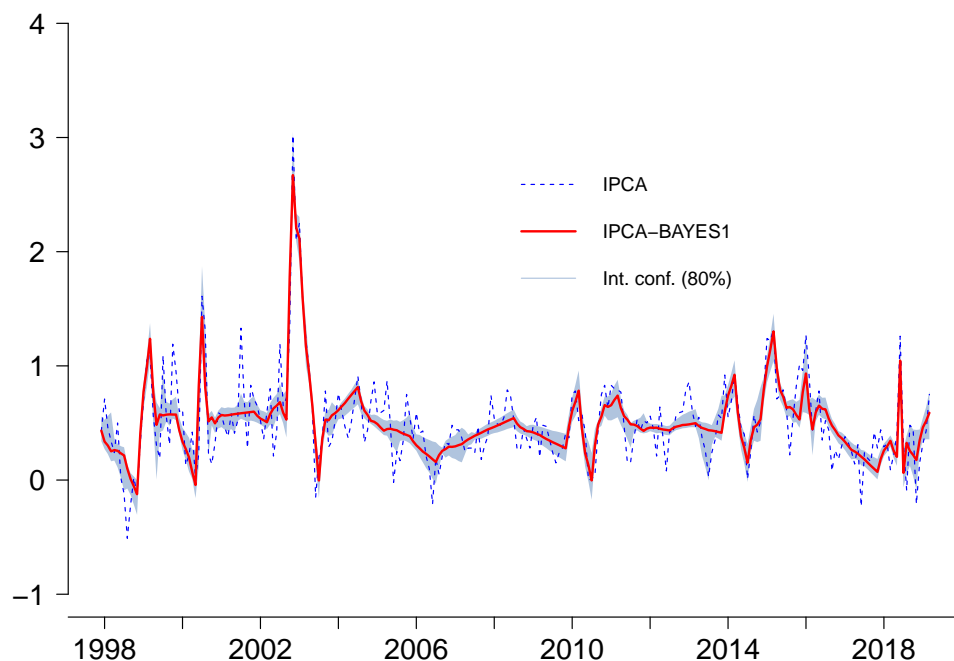


Figura 11 – IPCA, núcleo de inflação IPCA-BAYES1 e intervalo de confiança

3 Limiarização dos Coeficientes *Wavelets* para a Construção do Núcleo IPCA-BAYES2

A Tabela 3 fornece a estimativa do limiar obtida pelo método de [Johnstone e Silverman \(2005b\)](#). Esse limiar para cada um dos níveis, em termos de desvio padrão, corresponde ao universal $\sqrt{2\log n}$, o maior valor permitido pelo modelo. O cálculo por nível significa permitir alguma correlação no ruído. A Figura 12 mostra os coeficientes originais da transformada DWT obtidos no primeiro passo do método e os mesmos limiarizados na segunda etapa.

Tabela 3 – *Threshold* Estimado

Nível	1	2	3	4
<i>Threshold</i> (múltiplo do desvio padrão)	3.12	2.84	2.63	2.35
Desvio padrão	0.17	0.26	0.51	0.50

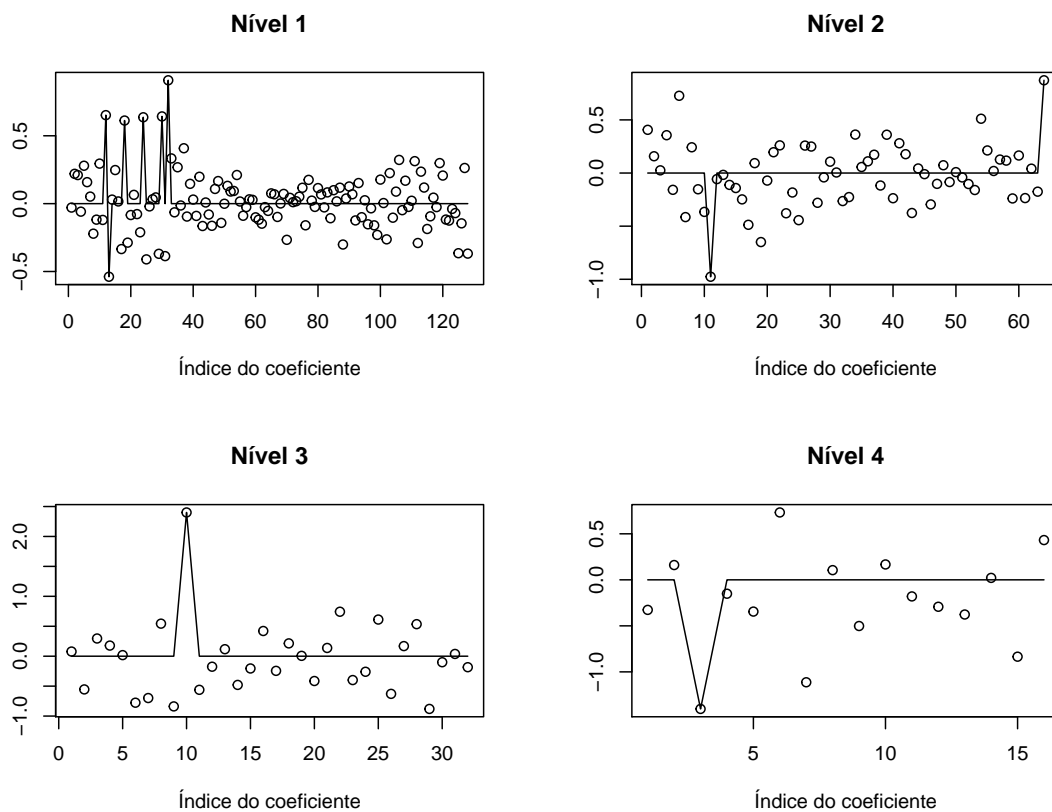


Figura 12 – Coeficientes da transformada DWT originais (o) e limiarizados (-).

Referências

- ABRAMOVICH, F.; SAPATINAS, T.; SILVERMAN, B. W. Wavelet thresholding via a bayesian approach. **Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)**, Blackwell Publishers Ltd., v. 60, n. 4, p. 725–749, 1998. ISSN 1467-9868. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/1467-9868.00151>>.
- AMAR, A. Contribution of wavelet transformation and empirical mode decomposition to measurement of u.s core inflation. **Applied Mathematical Sciences**, v. 6, n. 135, p. 6739 – 6752, 2012.
- ANDERSON, R. G. *et al.* Core inflation as idiosyncratic persistence: a wavelet based approach to measuring core inflation. . 2006. Disponível em: <https://ideas.repec.org/p/hhs/lunewp/2008_019.html>.
- ANDERSSON, F. N. G. **Core Inflation - Why the Fed got it Wrong**. [S.l.], 2008. Disponível em: <https://ideas.repec.org/p/hhs/lunewp/2008_019.html>.
- BAQAEE, D. Using wavelets to measure core inflation: The case of new zealand. **The North American Journal of Economics and Finance**, v. 21, n. 3, p. 241–255, 2010.
- BARBER, S. **waveband: Computes credible intervals for Bayesian wavelet shrinkage**. [S.l.], 2012. R package version 4.6. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=waveband>>.
- BARBER, S.; NASON, G. P.; SILVERMAN, B. W. Posterior probability intervals for wavelet thresholding. **Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)**, Blackwell Science, Ltd, v. 64, n. 2, p. 189–205, 2002. ISSN 1467-9868. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/1467-9868.00332>>.
- BULLARD, J. Measuring inflation: The core is rotten. **Federal Reserve Bank of St. Louis Review**, p. 223–234, Jul./Aug. 2011.
- CECCHETTI, S. G. Measuring short-run inflation for central bankers. **Review**, n. May, p. 143–155, 1997. Disponível em: <<https://ideas.repec.org/a/fip/fedlr/y1997imayp143-155.html>>.
- CONSTANTINE, W.; PERCIVAL, D. **wmtsa: Wavelet Methods for Time Series Analysis**. [S.l.], 2016. R package version 2.0-2. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=wmtsa>>.
- CROWLEY, P. **An intuitive guide to wavelets for economists**. [S.l.], 2005.
- DENARDIN, A. A.; KOZAKEVICIUS, A.; SCHMIDT, A. A. Avaliação da medida de núcleo de inflação baseada no método wavelet para o brasil. In: ENCONTRO NACIONAL DE ECONOMIA, 44., 2016, Foz do Iguaçu. **Anais...** Rio de Janeiro: Associação Nacional dos Centros de Pós-Graduação em Economia, 2016.

DONOHO, D. L.; JOHNSTONE, I. M. Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage. **Biometrika**, v. 81, p. 425–455, 1994.

DONOHO, D. L.; JOHNSTONE, I. M. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage. **JOURNAL OF THE AMERICAN STATISTICAL ASSOCIATION**, p. 1200–1224, 1995.

DONOHO, D. L.; JOHNSTONE, I. M. Minimax estimation via wavelet shrinkage. **Ann. Statist.**, The Institute of Mathematical Statistics, v. 26, n. 3, p. 879–921, 06 1998. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1214/aos/1024691081>>.

DOWD, K.; COTTER, J.; LOH, L. U.s. core inflation: A wavelet analysis. **Macroeconomic Dynamics**, Cambridge University Press, v. 15, n. 4, p. 513536, 2011.

EHRMANN, M. *et al.* Measures of underlying inflation for the euro area. **Economic Bulletin Articles**, v. 4, 2018. Disponível em: <<https://ideas.repec.org/a/ecb/ecbart/201800043.html>>.

GENÇAY, R.; SELÇUK, F.; WHITCHER, B. **An introduction to wavelets and other filtering methods in finance and economics**. San Diego: Academic Press, 2002.

JOHNSTONE, I.; SILVERMAN, B. Ebayesthresh: R programs for empirical bayes thresholding. **Journal of Statistical Software**, v. 12, n. 1, p. 1–38, 2005. ISSN 1548-7660. Disponível em: <<https://www.jstatsoft.org/index.php/jss/article/view/v012i08>>.

JOHNSTONE, I. M.; SILVERMAN, B. W. Empirical bayes selection of wavelet thresholds. **The Annals of Statistics**, v. 33, n. 4, p. 1700–1752, 2005. ISSN 0090-5364. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1214/009053605000000345>>.

LAHURA, E.; VEGA, M. **Evaluation of Wavelet-based Core Inflation Measures: Evidence from Peru**. [S.l.], 2011. Disponível em: <<http://EconPapers.repec.org/RePEc:pcp:pucwps:wp00320>>.

MISHKIN, F. **Headline versus core inflation in the conduct of monetary policy: a speech at the Business Cycles, International Transmission and Macroeconomic Policies Conference, HEC Montreal, Montreal, Canada, October 20, 2007**. [S.l.], 2007. Disponível em: <<https://EconPapers.repec.org/RePEc:fip:fedgsq:332>>.

MORETTIN, P. **Ondas e Ondaletas Vol. 23**. EDUSP, 1999. ISBN 9788531405099. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=n9kPHigs-MsC>>.

MORETTIN, P. **Ondas e Ondaletas Vol. 23**. 2. ed. EDUSP, 2014. ISBN 9788531414787. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=n9kPHigs-MsC>>.

NASON, G. **Wavelet Methods in Statistics with R**. 1. ed. [S.l.]: Springer Publishing Company, Incorporated, 2008. ISBN 0387759603, 9780387759609.

NASON, G. **wavethresh: Wavelets Statistics and Transforms**. [S.l.], 2016. R package version 4.6.8. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=wavethresh>>.

NASON, G. P. Wavelet shrinkage using cross-validation. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)**, [Royal Statistical Society, Wiley], v. 58, n. 2, p. 463–479, 1996. ISSN 00359246. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2345989>>.

PERCIVAL, D. B.; WALDEN, A. T. **Wavelet methods for time series analysis**. [S.l.]: Cambridge Univ. Press, 2000. ISBN 0521640687 0521685087 9780521640688 9780521685085.

R Core Team. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria, 2017. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>.

RAMSEY, J. **Wavelets in Economics and Finance: Past and Future**. [S.l.], 2002. Disponível em: <<http://EconPapers.repec.org/RePEc:cvs:starer:02-02>>.

SANTOS, C.; CASTELAR, I. Avaliando as medidas de núcleo da inflação no Brasil. **Economia Aplicada**, v. 20, n. 1, p. 35–56, 2016. ISSN 1980-5330. Disponível em: <<https://www.revistas.usp.br/ecoa/article/view/111677>>.

SILVA FILHO, T. N. A.-c. T. d.; FIGUEIREDO, F. M. R. Has core inflation been doing a good job in Brazil? **Revista Brasileira de Economia**, scielo, v. 65, p. 207 – 233, 06 2011. ISSN 0034-7140. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0034-71402011000200005&nrm=iso>.

SILVA FILHO, T. N. A.-c. T. d.; FIGUEIREDO, F. M. R. **Revisitando as Medidas de Núcleo de Inflação do Banco Central do Brasil**. Brasília, DF: Banco Central do Brasil, 2014. 30 p. (Texto para discussão, 356).

WHITCHER, B. **waveslim: Basic wavelet routines for one-, two- and three-dimensional signal processing**. [S.l.], 2015. R package version 1.7.5. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=waveslim>>.